RAPPORT INTERNE

Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique, Ecole Centrale de Lyon

Traitement de la partie hyperbolique du système des équations Navier-Stokes moyennées et des équations de transport issues d'une fermeture au premier ordre pour un fluide compressible

Alain Page[†] et Markus Uhlmann

Mars 1996

† SNECMA–Etablissement de Villaroche, 77550 Moissy-Cramayel

1 Introduction

Dans le cadre d'une description statistique des écoulements turbulents, le problème de fermeture consiste à déterminer les corrélations inconnues créées par le processus de moyennage des équations de Navier-Stokes. Les corrélations entre les composantes fluctantes de la vitesse représentent un échange d'énergie et de quantité de mouvement entre le mouvement moyen et le mouvement turbulent. Leur modélisation fait fréquement appel à des grandeurs supplémentaires qui sont résolues au moyen de nouvelles équations de transport. Nous obtenons alors un nouveau système d'équations couplées. Dans le cas d'un fluide compressible, le caractère de ce système est modifié par rapport à celui des équations de Navier-Stokes seules: une conséquence du couplage avec les équations de la turbulence est la modification du comportement des ondes caractéristiques régies par la partie hyperbolique du système. Cela est particulièrement important dans la construction des méthodes de résolution des écoulements présentant des discontinuités.

Un solveur basé sur le principe des caractéristiques doit tenir compte précisément des vitesses de propagation des ondes associées; il doit permettre une décomposition correcte des flux selon les différentes caractéristiques.

Cette démarche se fonde naturellement sur la totalité des termes hyperboliques présents dans les équations du système couplé. Cependant, ceux-ci peuvent contenir des termes sources qui rendent le système non-conservatif. Dans ce cas, les développements analytiques et numériques [1] se compliquent et il est possible de ne retenir qu'une partie des termes hyperboliques afin d'alléger ces calculs. La question généralement posée concerne alors le choix de la partie dite *hyperbolique approchée*, c'est-à-dire la partie sur laquelle le solveur numérique est construit: dans quelle mesure est-il possible de simplifier ces développements en réduisant la partie *hyperbolique approchée* par rapport à la partie hyperbolique complète? (ce qui revient à traiter certains termes hyperboliques de façon analogue aux termes elliptiques, donc par une formulation centrée) Est-il également possible de découpler les équations de l'écoulement moyen de celles qui régissent les grandeurs associées aux fluctuations?

Notre objectif est de tenter d'apporter une réponse à ces questions. Nous présentons diverses représentations du système *hyperbolique approché*. Nos conclusions se basent sur une synthèse de traitements conçus par différents auteurs [2, 3, 1]. Mais, nous n'abordons pas ici l'analyse de ces systèmes continus (caractérisation entropique, propriétés de positivité de pression, etc.); le lecteur pourra se reporter aux références [4, 1].

Dans ce rapport, nous présentons tout d'abord les différents type de modélisation qui sont susceptibles de s'appliquer à cette étude ainsi que la formulation mathématique du problème. Dans la deuxième section, les différentes possibilités concernant le choix de la partie *hyperbolique approchée* sont passées en revue; les valeurs propres et les matrices de passage associées sont indiquées. La résolution numérique par une méthode de décomposition de flux (Roe [2]) est exposée dans la section 3. Enfin, quelques résultats pour un problème monodimensionnel (tube à choc) sont présentés dans la section 4.

2 Formulation du problème

La fermeture au premier ordre pour les corrélations doubles de la vitesse est basée sur une relation constitutive qui, si nous notons par u_i'' la fluctuation de la i^{eme} composante de vitesse, prend la forme générale suivante:

$$- \overline{\rho}\widetilde{u_i''u_j''} = -\frac{2}{3}\,\overline{\rho}\widetilde{k}\,\delta_{ij} + \overline{\tau}_{ij}^{dev} \quad . \tag{1}$$

La partie déviateur $\overline{\tau}_{ij}^{dev}$ est une fonction des déformations moyennes et d'une échelle de temps caractéristique de la turbulence:

$$\overline{\tau}_{ij}^{dev} = f_{ij}(\frac{\partial \widetilde{u}_l}{\partial x_k}, \frac{V_t}{L_t}) \quad . \tag{2}$$

En général, V_t est pris égal à $\sqrt{\widetilde{k}}$, et L_t est obtenu

- soit par une relation algébrique (modèle à une équation),
- soit au moyen d'une grandeur $g = \widetilde{k}^m L_t^n$ calculée á l'aide d'une équation de transport (par exemple $m = 3/2$, $n = -1$ donne $g = \widetilde{\epsilon}$ le taux de dissipation; $m = 1/2$, $n = -1$ donne $g = \widetilde{\omega}$ la fréquence des grosses échelles).

La fonction f_{ij} représente de manière générale une expression tensorielle isotrope [5, 6]. La troncature linéaire conduit à l'hypothèse de Boussinesq.

En utilisant l'équation (1), le terme de production d'énergie cinétique turbulente devient:

$$- \sum_{i,j} \frac{\partial \widetilde{u}_i}{\partial x_j}\overline{\rho}\widetilde{u_i''u_j''} = -\frac{2}{3}\overline{\rho}\widetilde{k}\,\mathrm{div}(\widetilde{\vec{v}}) + \sum_{i,j} \frac{\partial \widetilde{u}_i}{\partial x_j}\,\overline{\tau}_{ij}^{dev} \quad . \tag{3}$$

Dans tous les cas de modélisation mentionnés ci-dessus, linéaires ou non-linéaires, à l'aide d'une ou deux équations de transport, les parties hyperboliques complètes de ces systèmes sont équivalentes entre elles.

Les équations retenues ici sont donc celles de la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie pour la partie dite "aéro", et celle de transport de l'énergie cinétique turbulente k seule pour la partie dite "turbulente", les autres grandeurs représentatives étant découplées du système.

Dans ce qui suit, nous nous plaçons dans le cadre des écoulements compressibles bidimensionnels réels mono-espèce. Le qualificatif "réel" signifie que nous considérons les coefficients de chaleur massique à volume constant c_v et à pression constante c_p comme des fonctions de la température, ce qui généralise, d'un point de vue thermodynamique, notre propos. En omettant les symboles de moyenne "$\overline{()}$" et "$\widetilde{()}$" introduits par la décomposition de Favre [7], nous employons les notations suivantes: ρ est la masse volumique, p la pression, T la température, e l'énergie interne massique (et e^0 l'énergie de formation à la température de référence T_0), h l'enthalpie statique massique (et h^0 l'enthalpie de formation à la température de référence T_0), $\vec{v} = (u, v)^t$ la vitesse, E l'énergie totale volumique, H l'enthalpie totale volumique, R la constante des gaz parfaits. Ces différentes grandeurs sont reliées par les relations suivantes:

définition de l'énergie interne massique:

$$e = \int_{T_0}^{T} c_v(\theta)\, d\theta + e^0 \tag{4}$$

définition de l'enthalpie statique massique:

$$h = e + \frac{p}{\rho} = \int_{T_0}^{T} c_p(\theta)\, d\theta + h^0 \tag{5}$$

relation d'état des gaz parfaits:

$$p = \rho RT = \rho R f(e) \tag{6}$$

définition de l'énergie totale:

$$E = \rho(e + \frac{1}{2}\vec{v}^2 + k) \tag{7}$$

définition de l'enthalpie totale:

$$H = E + p = \rho(e + \frac{1}{2}\vec{v}^2 + \frac{p}{\rho} + k) \quad . \tag{8}$$

L'objet de ce rapport est le traitement de la partie hyperbolique des équations de transport "aero" et "turbulentes" d'un écoulement. Si nous négligeons les termes non-hyperboliques, ces équations se réduisent, dans un espace à deux dimensions, à:

$$\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{F}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{F}_y}{\partial y} + \vec{P} = \vec{0} \quad , \tag{9}$$

avec

$$\vec{W} = \left| \begin{array}{l} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E \\ \rho k \end{array} \right. \quad \vec{F}_x = \left| \begin{array}{l} \rho u \\ \rho u^2 + p + \frac{2}{3}\rho k \\ \rho u v \\ (E + p + \frac{2}{3}\rho k)u \\ \rho k u \end{array} \right. \quad \vec{F}_y = \left| \begin{array}{l} \rho v \\ \rho u v \\ \rho v^2 + p + \frac{2}{3}\rho k \\ (E + p + \frac{2}{3}\rho k)v \\ \rho k v \end{array} \right. \quad \vec{P} = \left| \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{2}{3}\rho k \,\mathrm{div}(\vec{v}) \end{array} \right.$$

$\vec{W}$ est le vecteur des grandeurs inconnues pour le système couplé tel qu'il est écrit dans l'équation (9). $\vec{F}_x$ et $\vec{F}_y$ sont les flux convectifs selon les deux directions de l'espace et $\vec{P}$ est la partie hyperbolique de la production.

Dans le cas où les équations sont découplées, ce système se scinde en une partie "aéro" où l'inconnue est $\vec{W}^a$ et une partie "turbulente" où l'inconnue est $\vec{W}^t$.

Le système "aéro" est":

$$\frac{\partial \vec{W}^a}{\partial t} + \frac{\partial \vec{F}^a_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{F}^a_y}{\partial y} + \vec{P}^a = \vec{0} \quad , \tag{10}$$

avec

$$\vec{W}^a = \left| \begin{array}{l} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E \end{array} \right. \quad \vec{F}^a_x = \left| \begin{array}{l} \rho u \\ \rho u^2 + p + \frac{2}{3}\rho k \\ \rho u v \\ (E + p + \frac{2}{3}\rho k)u \end{array} \right. \quad \vec{F}^a_y = \left| \begin{array}{l} \rho v \\ \rho u v \\ \rho v^2 + p + \frac{2}{3}\rho k \\ (E + p + \frac{2}{3}\rho k)v \end{array} \right. \quad \vec{P}^a = \left| \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right.$$

Le système "turbulent" est":

$$\frac{\partial \vec{W}^t}{\partial t} + \frac{\partial \vec{F}^t_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{F}^t_y}{\partial y} + \vec{P}^t = \vec{0} \quad , \tag{11}$$

avec

$$\vec{W}^t = \Big| \; \rho k \qquad \vec{F}_x^t = \Big| \; \rho k u \qquad \vec{F}_y^t = \Big| \; \rho k v \qquad \vec{P}^t = \Big| \; \tfrac{2}{3}\rho k \,\mathrm{div}(\vec{v}) \qquad .$$

Soient $\vec{n} = (n_1, n_2)^t$ un vecteur normé de l'espace, $\vec{\vec{J}}$ la matrice jacobienne de $\vec{F}_x.n_1 + \vec{F}_y.n_2$ et $\vec{\vec{G}}$ la matrice jacobienne de $\vec{P}$ par rapport à $\vec{W}$. Nous définissons de la même façon $\vec{\vec{J}}^a$ et $\vec{\vec{G}}^a$ les matrices jacobiennes de $\vec{F}_x^a.n_1 + \vec{F}_y^a.n_2$ et $\vec{P}^a$ par rapport à $\vec{W}^a$. Nous posons enfin $\vec{\vec{A}}=\vec{\vec{J}} + \vec{\vec{G}}$ et $\vec{\vec{A}}^a=\vec{\vec{J}}^a + \vec{\vec{G}}^a$.

Lorsque la partie hyperbolique des équations est traitée à l'aide d'une formulation Galerkin volumes finis, la matrice $\vec{\vec{A}}$ (resp. $\vec{\vec{A}}^a$) apparaît explicitement dans la discrétisation des flux. Le vecteur $\vec{n}$ est alors la normale courante au contour de la cellule de contrôle volumes finis. D'autre part, si nous nous plaçons d'un point de vue du concept mathématique des caractéristiques, $\vec{n}$ définit un axe orienté qui porte la direction de propagation des surfaces caractéristiques, tandis que les valeurs propres de la matrice $\vec{\vec{A}}$ (resp. $\vec{\vec{A}}^a$) représentent la valeur algébrique de la vitesses des ondes caractéristiques sur cet axe. Nous voyons donc que l'étude de la matrice $\vec{\vec{A}}$ (resp. $\vec{\vec{A}}^a$) associé à une direction $\vec{n}$ en un point M de l'écoulement est essentielle aussi bien à la compréhension des phénomènes physiques qu'à la discrétisation des équations (par exemple à l'aide d'un schéma Galerkin volumes finis) en vue d'une résolution numérique.

Cette étude est l'objet des paragraphes suivants: nous passons en revue les différentes possibilités dans le choix de la partie *hyperbolique approchée*. Notons que le flux hyperbolique $\vec{F}_x^a.n_1 + \vec{F}_y^a.n_2$ est homogène et apparaît sous forme conservative. Ce n'est pas le cas de $\vec{P}$.

Dans la suite de ce rapport, nous posons:

$$\gamma = 1 + R\frac{\partial T}{\partial e} = 1 + Rf'(e) \quad .$$

γ représente le coefficient polytropique, ou rapport des chaleurs massiques.

3 Choix du système

3.1 Schéma 1

Le premier schéma que nous présentons ici est le plus simple. Il s'agit de retrouver un système identique à celui des équations écrites en laminaires.

Il y a donc découplage entre le système "aéro" et le système "turbulent"; et l'énergie cinétique turbulente ne doit pas apparaître dans la partie *hyperbolique approchée*. Pour cela, il suffit de laisser les termes hyperboliques issus de la modélisation des corrélations de vitesse au second membre (ils seront traités comme des termes elliptiques) et de retrancher à l'équation sur E l'équation sur ρk. L'énergie transportée par cette équation ne sera donc plus E mais $E' = E - \rho k$, soit:

$$E' = \rho(e + \frac{1}{2}\vec{v}^2) \quad . \tag{12}$$

Nous retrouvons ainsi les mêmes expression que dans le cas laminaire classique. Cette technique est avantageuse si nous disposons déjà d'un solveur laminaire et qu'il s'agit de l'adapter aux écoulements turbulents à moindre frais. L'étude porte donc sur le système "aéro" seul qui devient:

$$\frac{\partial \vec{W}_1^a}{\partial t} + \frac{\partial \vec{F}_{1x}^a}{\partial x} + \frac{\partial \vec{F}_{1y}^a}{\partial y} = \vec{S}_1^a \quad , \tag{13}$$

avec

$$\vec{W}_1^a = \left| \begin{array}{l} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E' \end{array} \right. \quad \vec{F}_{1x}^a = \left| \begin{array}{l} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho u v \\ (E' + p)u \end{array} \right. \quad \vec{F}_{1y}^a = \left| \begin{array}{l} \rho v \\ \rho u v \\ \rho v^2 + p \\ (E' + p)v \end{array} \right. \quad \vec{S}_1^a = \left| \begin{array}{l} 0 \\ -\frac{2}{3}\frac{\partial \rho k}{\partial x} \\ -\frac{2}{3}\frac{\partial \rho k}{\partial y} \\ -\frac{2}{3}\vec{\nabla}[\rho k].\vec{v} \end{array} \right. \quad .$$

Le système "turbulent" (11) est inchangé.

La matrice jacobienne associée au flux $\vec{F}_x^a.n_1 + \vec{F}_y^a.n_2$ est:

$$\vec{\vec{J}}_1^a = \begin{bmatrix} 0 & n_1 & n_2 & 0 \\ -u(\vec{v}.\vec{n}) + [c_1^2 + (\gamma-1)(\vec{v}^2 - h_1)]n_1 & \vec{v}.\vec{n} - (\gamma-2)un_1 & un_2 - (\gamma-1)vn_1 & (\gamma-1)n_1 \\ -v(\vec{v}.\vec{n}) + [c_1^2 + (\gamma-1)(\vec{v}^2 - h_1)]n_2 & vn_1 - (\gamma-1)un_2 & \vec{v}.\vec{n} - (\gamma-2)vn_2 & (\gamma-1)n_2 \\ (\vec{v}.\vec{n})[c_1^2 + (\gamma-1)(\vec{v}^2 - h_1) - h_1] & h_1 n_1 - (\gamma-1)u(\vec{v}.\vec{n}) & h_1 n_2 - (\gamma-1)v(\vec{v}.\vec{n}) & \gamma(\vec{v}.\vec{n}) \end{bmatrix}$$

h_1 correspond à l'enthalpie totale massique que nous aurions en laminaire:

$$h_1 = h + \frac{1}{2}\vec{v}^2 = \frac{E' + p}{\rho} = \frac{E + p}{\rho} - k \quad ,$$

et c_1 est ici la vitesse du son exacte:

$$c_1 = \sqrt{\gamma R T} \quad .$$

Les valeurs propres de $\overset{\Rightarrow}{J^a}$ sont rassemblées dans sa matrice diagonale semblable:

$$\overset{\Rightarrow}{\Lambda_1^a} = \text{ diag } (\vec{v}.\vec{n}, \vec{v}.\vec{n}, \vec{v}.\vec{n} + c_1, \vec{v}.\vec{n} - c_1) \quad .$$

Les vecteurs propres à droite correspondants sont:

$$\overset{\Rightarrow}{R_1^a} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ u & -n_2 & u + c_1 n_1 & u - c_1 n_1 \\ v & n_1 & v + c_1 n_2 & v - c_1 n_2 \\ h_1 - \frac{c_1^2}{\gamma - 1} & v n_1 - u n_2 & h_1 + c_1(\vec{v}.\vec{n}) & h_1 - c_1(\vec{v}.\vec{n}) \end{bmatrix} \quad ,$$

et les vecteurs propres à gauche:

$$\overset{\Rightarrow}{R_1^a}{}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{\gamma-1}{c_1^2}(\vec{v}^2 - h_1) & \frac{\gamma-1}{c_1^2} u & \frac{\gamma-1}{c_1^2} v & -\frac{\gamma-1}{c_1^2} \\ u n_2 - v n_1 & -n_2 & n_1 & 0 \\ \frac{1}{2c_1^2}(c_1^2 + (\gamma-1)(\vec{v}^2 - h_1) - c_1(\vec{v}.\vec{n})) & -\frac{1}{2c_1^2}[(\gamma-1)u - c_1 n_1] & -\frac{1}{2c_1^2}[(\gamma-1)v - c_1 n_2] & \frac{\gamma-1}{2c_1^2} \\ \frac{1}{2c_1^2}(c_1^2 + (\gamma-1)(\vec{v}^2 - h_1) + c_1(\vec{v}.\vec{n})) & -\frac{1}{2c_1^2}[(\gamma-1)u + c_1 n_1] & -\frac{1}{2c_1^2}[(\gamma-1)v + c_1 n_2] & \frac{\gamma-1}{2c_1^2} \end{bmatrix}$$

Dans le cas où l'utilisateur souhaite employer la méthode de décomposition de Roe (flux difference splitting), l'état de Roe correspondant est bien sûr le même que dans le cas laminaire.

3.2 Schéma 2

Dans sa formulation initiale, le second schéma diffère peu du cas précédent: les systèmes "aéro" et "turbulent" restent découplés et les termes issus de la modélisation des corrélations de vitesse restent au second membre. La différence réside en ce que nous gardons, dans la définition de l'énergie, sa partie turbulente: $+\rho k$.

L'étude porte encore une fois sur le système "aéro" seul:

$$\frac{\partial \vec{W}_2^a}{\partial t} + \frac{\partial \vec{F}_{2x}^a}{\partial x} + \frac{\partial \vec{F}_{2y}^a}{\partial y} = \vec{S}_2^a \quad , \tag{14}$$

avec

$$\vec{W}_2^a = \left| \begin{array}{l} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E \end{array} \right. \quad \vec{F}_{2x}^a = \left| \begin{array}{l} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ (E+p)u \end{array} \right. \quad \vec{F}_{2y}^a = \left| \begin{array}{l} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ (E+p)v \end{array} \right. \quad \vec{S}_2^a = \left| \begin{array}{l} 0 \\ -\frac{2}{3}\frac{\partial \rho k}{\partial x} \\ -\frac{2}{3}\frac{\partial \rho k}{\partial y} \\ -\frac{2}{3}\mathrm{div}(\rho k \vec{v}) \end{array} \right. \quad .$$

Et le système "turbulent" (11) est inchangé.

La matrice jacobienne associée au flux "aéro" est:

$$\vec{\vec{J}}_2^a = \begin{bmatrix} 0 & n_1 & n_2 & 0 \\ -u(\vec{v}.\vec{n}) + [c_2^2 + (\gamma-1)(\vec{v}^2 - h_2)]n_1 & \vec{v}.\vec{n} - (\gamma-2)un_1 & un_2 - (\gamma-1)vn_1 & (\gamma-1)n_1 \\ -v(\vec{v}.\vec{n}) + [c_2^2 + (\gamma-1)(\vec{v}^2 - h_2)]n_2 & vn_1 - (\gamma-1)un_2 & \vec{v}.\vec{n} - (\gamma-2)vn_2 & (\gamma-1)n_2 \\ (\vec{v}.\vec{n})[c_2^2 + (\gamma-1)(\vec{v}^2 - h_2) - h_2] & h_2 n_1 - (\gamma-1)u(\vec{v}.\vec{n}) & h_2 n_2 - (\gamma-1)v(\vec{v}.\vec{n}) & \gamma(\vec{v}.\vec{n}) \end{bmatrix} .$$

h_2 est l'enthalpie totale massique exacte dans le cas turbulent; elle contient le terme k:

$$h_2 = h + \frac{1}{2}\vec{v}^2 + k = \frac{E+p}{\rho} \quad ,$$

et c_2 est une pseudo vitesse du son, corrigée d'un terme qui dépend de la turbulence:

$$c_2 = \sqrt{\gamma RT + (\gamma-1)k} \quad .$$

La matrice diagonale semblable à $\vec{\vec{J}}_2^a$ est:

$$\vec{\vec{\Lambda}}_2^a = \mathrm{diag}\ (\vec{v}.\vec{n}, \vec{v}.\vec{n}, \vec{v}.\vec{n} + c_2, \vec{v}.\vec{n} - c_2) \quad .$$

Les vecteurs propres à droite correspondants sont:

$$\overset{\Rightarrow}{R_2^a} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ u & -n_2 & u + c_2 n_1 & u - c_2 n_1 \\ v & n_1 & v + c_2 n_2 & v - c_2 n_2 \\ h_2 - \frac{c_2^2}{\gamma - 1} & v n_1 - u n_2 & h_2 + c_2(\vec{v}.\vec{n}) & h_2 - c_2(\vec{v}.\vec{n}) \end{bmatrix} \quad ,$$

et les vecteurs propres à gauche:

$$\overset{\Rightarrow}{R_2^a}{}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{\gamma-1}{c_2^2}(\vec{v}^2 - h_2) & \frac{\gamma-1}{c_2^2}u & \frac{\gamma-1}{c_2^2}v & -\frac{\gamma-1}{c_2^2} \\ u n_2 - v n_1 & -n_2 & n_1 & 0 \\ \frac{1}{2c_2^2}(c_2^2 + (\gamma-1)(\vec{v}^2 - h_2) - c_2(\vec{v}.\vec{n})) & -\frac{1}{2c_2^2}[(\gamma-1)u - c_2 n_1] & -\frac{1}{2c_2^2}[(\gamma-1)v - c_2 n_2] & \frac{\gamma-1}{2c_2^2} \\ \frac{1}{2c_2^2}(c_2^2 + (\gamma-1)(\vec{v}^2 - h_2) + c_2(\vec{v}.\vec{n})) & -\frac{1}{2c_2^2}[(\gamma-1)u + c_2 n_1] & -\frac{1}{2c_2^2}[(\gamma-1)v + c_2 n_2] & \frac{\gamma-1}{2c_2^2} \end{bmatrix} .$$

Nous constatons donc que, sous réserve de définir les bonnes grandeurs h_2 et c_2, l'expression des différentes matrices est inchangée par rapport au cas laminaire. Le passage du cas 1 au cas 2 peut donc se faire avec un minimum de frais. Cependant, malgré des résultats très proches, nous pouvons montrer qu'il n'y a pas d'état de Roe pour cette formulation. En effet, la condition de saut de Roe ne peut pas être résolue. Il est alors possible d'approximer cet état de Roe par un état approché comme celui que nous obtenons dans le cas 1, autrement dit dans le cas laminaire, ou encore un état arithmétique [1].

3.3 Schéma 3

Par rapport au cas précédent, nous prenons en compte, dans la partie *hyperbolique approchée*, tous les termes de l'équation (10), mais nous conservons encore un découplage avec l'équation sur k et nous considérons le système:

$$\frac{\partial \vec{W}_3^a}{\partial t} + \frac{\partial \vec{F}_{3x}^a}{\partial x} + \frac{\partial \vec{F}_{3y}^a}{\partial y} = \vec{S}_3^a \quad , \tag{15}$$

avec

$$\vec{W}_3^a = \left| \begin{array}{l} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E \end{array} \right. \quad \vec{F}_{3x}^a = \left| \begin{array}{l} \rho u \\ \rho u^2 + p + \frac{2}{3}\rho k \\ \rho u v \\ (E + p + \frac{2}{3}\rho k)u \end{array} \right. \quad \vec{F}_{3y}^a = \left| \begin{array}{l} \rho v \\ \rho u v \\ \rho v^2 + p + \frac{2}{3}\rho k \\ (E + p + \frac{2}{3}\rho k)v \end{array} \right. \quad \vec{S}_3^a = \left| \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right. \quad .$$

Ainsi, pour les équations "aéro", la partie hyperbolique prise en compte se trouve être la totalité des termes hyperboliques. Dans le cas d'un solveur découplé, c'est la manière la plus rigoureuse de procéder.

Le système "turbulent" (11) reste toujours inchangé.

La matrice jacobienne associée au flux "aéro" est:

$$\vec{\vec{J}}_3^a = \begin{bmatrix} 0 & n_1 & n_2 & 0 \\ -u(\vec{v}.\vec{n}) + [c_3^2 + (\gamma-1)(\vec{v}^2 - h_3)]n_1 & \vec{v}.\vec{n} - (\gamma-2)un_1 & un_2 - (\gamma-1)vn_1 & (\gamma-1)n_1 \\ -v(\vec{v}.\vec{n}) + [c_3^2 + (\gamma-1)(\vec{v}^2 - h_3)]n_2 & vn_1 - (\gamma-1)un_2 & \vec{v}.\vec{n} - (\gamma-2)vn_2 & (\gamma-1)n_2 \\ (\vec{v}.\vec{n})[c_3^2 + (\gamma-1)(\vec{v}^2 - h_3) - h_3] & h_3 n_1 - (\gamma-1)u(\vec{v}.\vec{n}) & h_3 n_2 - (\gamma-1)v(\vec{v}.\vec{n}) & \gamma(\vec{v}.\vec{n}) \end{bmatrix}$$

.

h_3 est l'enthalpie totale massique exacte augmentée de $\frac{2}{3}k$:

$$h_3 = h + \frac{1}{2}\vec{v}^2 + \frac{5}{3}k = \frac{E+p}{\rho} + \frac{2}{3}k \quad ,$$

et c_3 est défini par:

$$c_3 = \sqrt{\gamma RT + \frac{5}{3}(\gamma-1)k} \quad .$$

La matrice diagonale semblable à $\vec{\vec{J}}_3^a$ est:

$$\vec{\vec{\Lambda}}_3^a = \text{ diag } (\vec{v}.\vec{n}, \vec{v}.\vec{n}, \vec{v}.\vec{n} + c_3, \vec{v}.\vec{n} - c_3) \quad .$$

Les vecteurs propres à droite correspondants sont:

$$
\overset{\Rightarrow}{R}{}^{a}_{3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ u & -n_2 & u + c_3 n_1 & u - c_3 n_1 \\ v & n_1 & v + c_3 n_2 & v - c_3 n_2 \\ h_3 - \frac{c_3^2}{\gamma - 1} & v n_1 - u n_2 & h_3 + c_3 (\vec{v}.\vec{n}) & h_3 - c_3 (\vec{v}.\vec{n}) \end{bmatrix} \quad ,
$$

et les vecteurs propres à gauche:

$$
\overset{\Rightarrow}{R}{}^{a}_{3}{}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{\gamma-1}{c_3^2}(\vec{v}^2 - h_3) & \frac{\gamma-1}{c_3^2} u & \frac{\gamma-1}{c_3^2} v & -\frac{\gamma-1}{c_3^2} \\ u n_2 - v n_1 & -n_2 & n_1 & 0 \\ \frac{1}{2c_3^2}(c_3^2 + (\gamma-1)(\vec{v}^2 - h_3) - c_3(\vec{v}.\vec{n})) & -\frac{1}{2c_3^2}[(\gamma-1)u - c_3 n_1] & -\frac{1}{2c_3^2}[(\gamma-1)v - c_3 n_2] & \frac{\gamma-1}{2c_3^2} \\ \frac{1}{2c_3^2}(c_3^2 + (\gamma-1)(\vec{v}^2 - h_3) + c_3(\vec{v}.\vec{n})) & -\frac{1}{2c_3^2}[(\gamma-1)u + c_3 n_1] & -\frac{1}{2c_3^2}[(\gamma-1)v + c_3 n_2] & \frac{\gamma-1}{2c_3^2} \end{bmatrix}
$$

.

Nous formulerons les mêmes remarques que dans le cas 2: sous réserve de définir les bonnes grandeurs h_3 et c_3, les expressions restent encore identiques. Et nous pouvons montrer qu'il n'y a pas non plus d'état de Roe, pour les mêmes raisons.

3.4 Schéma 4

Ce cas est intermédiaire entre les cas 2 et 5: il couple les cinq équations entre elles mais ne prend pas en compte les termes en ρk liés à la modélisation des corrélations doubles de vitesse fluctuante. La définition de E reste, bien sûr inchangée. Cette formulation est fréquemment employée par les auteurs [3].

Le système couplé considéré est:

$$
\frac{\partial \vec{W}_4}{\partial t} + \frac{\partial \vec{F}_{4x}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{F}_{4y}}{\partial y} = \vec{S}_4 \quad , \tag{16}
$$

avec

$$\vec{W}_4 = \left| \begin{array}{l} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E \\ \rho k \end{array} \right. \quad \vec{F}_{4x} = \left| \begin{array}{l} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ (E+p)u \\ \rho k u \end{array} \right. \quad \vec{F}_{4y} = \left| \begin{array}{l} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ (E+p)v \\ \rho k v \end{array} \right. \quad \vec{S}_4 = \left| \begin{array}{l} 0 \\ -\frac{2}{3}\frac{\partial \rho k}{\partial x} \\ -\frac{2}{3}\frac{\partial \rho k}{\partial y} \\ -\frac{2}{3}\mathrm{div}(\rho k \vec{v}) \\ -\frac{2}{3}\rho k \mathrm{div}(\vec{v}) \end{array} \right. \quad .$$

La matrice jacobienne associée au flux complet est:

$$\vec{\vec{J}}_4 = \begin{bmatrix} 0 & n_1 & n_2 & 0 & 0 \\ -u(\vec{v}.\vec{n}) + [c_4^2 + (\gamma-1)(\vec{v}^2 - h_4) + (\gamma-1)k]n_1 & \vec{v}.\vec{n} - (\gamma-2)un_1 & un_2 - (\gamma-1)vn_1 & (\gamma-1)n_1 & -(\gamma-1)n_1 \\ -v(\vec{v}.\vec{n}) + [c_4^2 + (\gamma-1)(\vec{v}^2 - h_4) + (\gamma-1)k]n_2 & vn_1 - (\gamma-1)un_2 & \vec{v}.\vec{n} - (\gamma-2)vn_2 & (\gamma-1)n_2 & -(\gamma-1)n_2 \\ (\vec{v}.\vec{n})[c_4^2 + (\gamma-1)(\vec{v}^2 - h_4) - h_4 + (\gamma-1)k] & h_4 n_1 - (\gamma-1)u(\vec{v}.\vec{n}) & h_4 n_2 - (\gamma-1)v(\vec{v}.\vec{n}) & \gamma(\vec{v}.\vec{n}) & -(\gamma-1)(\vec{v}.\vec{n}) \\ -k(\vec{v}.\vec{n}) & kn_1 & kn_2 & 0 & \vec{v}.\vec{n} \end{bmatrix}$$

h_4 a la même définition que h_2:

$$h_4 = h + \frac{1}{2}\vec{v}^2 + k = \frac{E+p}{\rho} \quad ,$$

mais c_4 reste égale à la vitesse du son réelle:

$$c_4 = \sqrt{\gamma R T} \quad .$$

La matrice diagonale semblable à $\vec{\vec{J}}_4$ est:

$$\vec{\vec{\Lambda}}_4 = \ \mathrm{diag}\ (\vec{v}.\vec{n}, \vec{v}.\vec{n}, \vec{v}.\vec{n} + c_4, \vec{v}.\vec{n} - c_4) \quad .$$

Les vecteurs propres à droite correspondants sont:

$$\vec{\vec{R}}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ u & -n_2 & u + c_4 n_1 & u - c_4 n_1 & 0 \\ v & n_1 & v + c_4 n_2 & v - c_4 n_2 & 0 \\ h_4 - \frac{c_4^2}{\gamma-1} & vn_1 - un_2 & h_4 + c_4(\vec{v}.\vec{n}) & h_4 - c_4(\vec{v}.\vec{n}) & 1 \\ k & 0 & k & k & 1 \end{bmatrix} \quad ,$$

et les vecteurs propres à gauche:

$$\vec{\vec{R}}_4^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{\gamma-1}{c_4^2}(\vec{v}^2 - h_4 + k) & \frac{\gamma-1}{c_4^2}u & \frac{\gamma-1}{c_4^2}v & -\frac{\gamma-1}{c_4^2} & \frac{\gamma-1}{c_4^2} \\ un_2 - vn_1 & -n_2 & n_1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2c_4^2}(c_4^2 + (\gamma-1)(\vec{v}^2 - h_4) - c_4(\vec{v}.\vec{n}) + (\gamma-1)k) & -\frac{1}{2c_4^2}[(\gamma-1)u - c_4 n_1] & -\frac{1}{2c_4^2}[(\gamma-1)v - c_4 n_2] & \frac{\gamma-1}{2c_4^2} & -\frac{\gamma-1}{2c_4^2} \\ \frac{1}{2c_4^2}(c_4^2 + (\gamma-1)(\vec{v}^2 - h_4) + c_4(\vec{v}.\vec{n}) + (\gamma-1)k) & -\frac{1}{2c_4^2}[(\gamma-1)u + c_4 n_1] & -\frac{1}{2c_4^2}[(\gamma-1)v + c_4 n_2] & \frac{\gamma-1}{2c_4^2} & -\frac{\gamma-1}{2c_4^2} \\ -k & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cette formulation couplée permet d'obtenir un état de Roe classique.

3.5 Schéma 5

La présente formulation complète le schéma 4: elle prend en compte tous les termes hyperboliques homogènes du système couplé. Elle est préférable au schéma précédent car son écriture est guère plus complexe. En outre, c'est le dernier cas qui permettra d'obtenir une décomposition de Roe simple. L'utilisateur qui désire coupler les équations "aéro" et "turbulente" sans alourdir son schéma par un terme non homogène a donc tout intérêt à opter pour cette formulation.

Le système couplé considéré est:

$$\frac{\partial \vec{W}_5}{\partial t} + \frac{\partial \vec{F}_{5x}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{F}_{5y}}{\partial y} = \vec{S}_5 \quad , \tag{17}$$

avec

$$\vec{W}_5 = \left| \begin{array}{l} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E \\ \rho k \end{array} \right. \quad \vec{F}_{5x} = \left| \begin{array}{l} \rho u \\ \rho u^2 + p + \frac{2}{3}\rho k \\ \rho uv \\ (E + p + \frac{2}{3}\rho k)u \\ \rho k u \end{array} \right. \quad \vec{F}_{5y} = \left| \begin{array}{l} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p + \frac{2}{3}\rho k \\ (E + p + \frac{2}{3}\rho k)v \\ \rho k v \end{array} \right. \quad \vec{S}_5 = \left| \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{2}{3}\rho k \,\mathrm{div}(\vec{v}) \end{array} \right.$$

La matrice jacobienne associée au flux complet est:

$$\overset{\Rightarrow}{J}_5 = \begin{bmatrix} 0 & n_1 & n_2 & 0 & 0 \\ -u(\vec{v}.\vec{n}) + [c_5^2 + (\gamma-1)(\vec{v}^2 - h_5) + (\gamma - \frac{5}{3})k]n_1 & \vec{v}.\vec{n} - (\gamma-2)un_1 & un_2 - (\gamma-1)vn_1 & (\gamma-1)n_1 & -(\gamma-\frac{5}{3})n_1 \\ -v(\vec{v}.\vec{n}) + [c_5^2 + (\gamma-1)(\vec{v}^2 - h_5) + (\gamma - \frac{5}{3})k]n_2 & vn_1 - (\gamma-1)un_2 & \vec{v}.\vec{n} - (\gamma-2)vn_2 & (\gamma-1)n_2 & -(\gamma-\frac{5}{3})n_2 \\ (\vec{v}.\vec{n})[c_5^2 + (\gamma-1)(\vec{v}^2 - h_5) - h_5 + (\gamma-\frac{5}{3})k] & h_5 n_1 - (\gamma-1)u(\vec{v}.\vec{n}) & h_5 n_2 - (\gamma-1)v(\vec{v}.\vec{n}) & \gamma(\vec{v}.\vec{n}) & -(\gamma-\frac{5}{3})(\vec{v}.\vec{n}) \\ -k(\vec{v}.\vec{n}) & kn_1 & kn_2 & 0 & \vec{v}.\vec{n} \end{bmatrix}$$

h_5 a la même définition que h_3:

$$h_5 = h + \frac{1}{2}\vec{v}^2 + \frac{5}{3}k = \frac{E+p}{\rho} + \frac{2}{3}k \quad ,$$

et c_5 est défini par:

$$c_5 = \sqrt{\gamma RT + \frac{2}{3}\gamma k} \quad .$$

La matrice diagonale semblable à $\overset{\Rightarrow}{J}_5$ est:

$$\overset{\Rightarrow}{\Lambda}_5 = \text{ diag } (\vec{v}.\vec{n}, \vec{v}.\vec{n}, \vec{v}.\vec{n} + c_5, \vec{v}.\vec{n} - c_5) \quad .$$

Les vecteurs propres à droite correspondants sont:

$$\overset{\Rightarrow}{R}_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ u & -n_2 & u + c_5 n_1 & u - c_5 n_1 & 0 \\ v & n_1 & v + c_5 n_2 & v - c_5 n_2 & 0 \\ h_5 - \frac{c_5^2}{\gamma-1} & vn_1 - un_2 & h_5 + c_5(\vec{v}.\vec{n}) & h_5 - c_5(\vec{v}.\vec{n}) & \frac{\gamma-\frac{5}{3}}{\gamma-1} \\ k & 0 & k & k & 1 \end{bmatrix} \quad ,$$

et les vecteurs propres à gauche:

$$\overset{\Rightarrow}{R_5}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{\gamma-1}{c_5^2}(\vec{v}^2 - h_5) - \frac{\gamma-\frac{5}{3}}{C_5^2} & \frac{\gamma-1}{c_5^2}u & \frac{\gamma-1}{c_5^2}v & -\frac{\gamma-1}{c_5^2} & \frac{\gamma-\frac{5}{3}}{c_5^2} \\ un_2 - vn_1 & -n_2 & n_1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2c_5^2}(c_5^2 + (\gamma-1)(\vec{v}^2 - h_5) - c_5(\vec{v}.\vec{n}) + (\gamma - \frac{5}{3})k) & -\frac{1}{2c_5^2}[(\gamma-1)u - c_5 n_1] & -\frac{1}{2c_5^2}[(\gamma-1)v - c_5 n_2] & \frac{\gamma-1}{2c_5^2} & -\frac{\gamma-\frac{5}{3}}{2c_5^2} \\ \frac{1}{2c_5^2}(c_5^2 + (\gamma-1)(\vec{v}^2 - h_5) + c_5(\vec{v}.\vec{n}) + (\gamma - \frac{5}{3})k) & -\frac{1}{2c_5^2}[(\gamma-1)u + c_5 n_1] & -\frac{1}{2c_5^2}[(\gamma-1)v + c_5 n_2] & \frac{\gamma-1}{2c_5^2} & -\frac{\gamma-\frac{5}{3}}{2c_5^2} \\ -k & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.6 Schéma 6

Ce dernier schéma est le plus complet: tous les termes hyperboliques, homogènes et non homogènes, sont pris en compte. Cependant, il n'est pas sous une forme conservative.

Le système considéré est finalement celui donné par l'équation (9):

$$\frac{\partial \vec{W}_6}{\partial t} + \frac{\partial \vec{F}_{6x}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{F}_{6y}}{\partial y} + \vec{P} = \vec{0} \quad , \tag{18}$$

avec

$$\vec{W}_6 = \left| \begin{array}{l} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E \\ \rho k \end{array} \right. \quad \vec{F}_{6x} = \left| \begin{array}{l} \rho u \\ \rho u^2 + p + \frac{2}{3}\rho k \\ \rho uv \\ (E + p + \frac{2}{3}\rho k)u \\ \rho k u \end{array} \right. \quad \vec{F}_{6y} = \left| \begin{array}{l} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p + \frac{2}{3}\rho k \\ (E + p + \frac{2}{3}\rho k)v \\ \rho k v \end{array} \right. \quad \vec{P} = \left| \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{2}{3}\rho k \operatorname{div}(\vec{v}) \end{array} \right.$$

La matrice jacobienne $\overset{\Rightarrow}{A_6}$ associée au flux est la somme de celle de la partie homogène ($\overset{\Rightarrow}{J_6}=\overset{\Rightarrow}{J_5}$), et de celle associée à $\vec{P}$.

$$\overset{\Rightarrow}{A_6} = \begin{bmatrix} 0 & n_1 & n_2 & 0 & 0 \\ -u(\vec{v}.\vec{n}) + [c_6^2 + (\gamma-1)(\vec{v}^2 - h_6) + \frac{5}{3}(\gamma - \frac{5}{3})k]n_1 & \vec{v}.\vec{n} - (\gamma-2)un_1 & un_2 - (\gamma-1)vn_1 & (\gamma-1)n_1 & -(\gamma - \frac{5}{3})n_1 \\ -v(\vec{v}.\vec{n}) + [c_6^2 + (\gamma-1)(\vec{v}^2 - h_6) + \frac{5}{3}(\gamma - \frac{5}{3})k]n_2 & vn_1 - (\gamma-1)un_2 & \vec{v}.\vec{n} - (\gamma-2)vn_2 & (\gamma-1)n_2 & -(\gamma - \frac{5}{3})n_2 \\ (\vec{v}.\vec{n})[c_6^2 + (\gamma-1)(\vec{v}^2 - h_6) - h_6 + \frac{5}{3}(\gamma - \frac{5}{3})k] & h_6 n_1 - (\gamma-1)u(\vec{v}.\vec{n}) & h_6 n_2 - (\gamma-1)v(\vec{v}.\vec{n}) & \gamma(\vec{v}.\vec{n}) & -(\gamma - \frac{5}{3})(\vec{v}.\vec{n}) \\ -\frac{5}{3}k(\vec{v}.\vec{n}) & \frac{5}{3}kn_1 & \frac{5}{3}kn_2 & 0 & \vec{v}.\vec{n} \end{bmatrix}$$

h_6 a la même définition que h_3 et h_5:

$$h_6 = h + \frac{1}{2}\vec{v}^2 + \frac{5}{3}k = \frac{E+p}{\rho} + \frac{2}{3}k \quad ,$$

mais c_6 prend une toute autre définition:

$$c_6 = \sqrt{\gamma RT + \frac{10}{9}k} \quad .$$

La matrice diagonale semblable à $\overset{\Rightarrow}{A}_6$ est:

$$\overset{\Rightarrow}{\Lambda}_5 = \text{ diag } (\vec{v}.\vec{n}, \vec{v}.\vec{n}, \vec{v}.\vec{n} + c_6, \vec{v}.\vec{n} - c_6) \quad .$$

Les vecteurs propres à droite correspondants sont:

$$\overset{\Rightarrow}{R}_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ u & -n_2 & u + c_6 n_1 & u - c_6 n_1 & 0 \\ v & n_1 & v + c_6 n_2 & v - c_6 n_2 & 0 \\ h_6 - \frac{c_6^2}{\gamma-1} & vn_1 - un_2 & h_6 + c_6(\vec{v}.\vec{n}) & h_6 - c_6(\vec{v}.\vec{n}) & \frac{\gamma-\frac{5}{3}}{\gamma-1} \\ \frac{5}{3}k & 0 & \frac{5}{3}k & \frac{5}{3}k & 1 \end{bmatrix} \quad ,$$

et les vecteurs propres à gauche:

$$\overset{\Rightarrow}{R}_6^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{\gamma-1}{c_6^2}(\vec{v}^2 - h_6) - \frac{5}{3}\frac{\gamma-\frac{5}{3}}{C_5^2} & \frac{\gamma-1}{c_6^2}u & \frac{\gamma-1}{c_6^2}v & -\frac{\gamma-1}{c_6^2} & \frac{\gamma-\frac{5}{3}}{c_6^2} \\ un_2 - vn_1 & -n_2 & n_1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2c_6^2}(c_6^2 + (\gamma-1)(\vec{v}^2 - h_6) - c_6(\vec{v}.\vec{n}) + \frac{5}{3}(\gamma - \frac{5}{3})k) & -\frac{1}{2c_6^2}[(\gamma-1)u - c_6 n_1] & -\frac{1}{2c_6^2}[(\gamma-1)v - c_6 n_2] & \frac{\gamma-1}{2c_6^2} & -\frac{\gamma-\frac{5}{3}}{2c_6^2} \\ \frac{1}{2c_6^2}(c_6^2 + (\gamma-1)(\vec{v}^2 - h_6) + c_6(\vec{v}.\vec{n}) + \frac{5}{3}(\gamma - \frac{5}{3})k) & -\frac{1}{2c_6^2}[(\gamma-1)u + c_6 n_1] & -\frac{1}{2c_6^2}[(\gamma-1)v + c_6 n_2] & \frac{\gamma-1}{2c_6^2} & -\frac{\gamma-\frac{5}{3}}{2c_6^2} \\ -\frac{5}{3}k & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

4 Résolution numérique

Dans une approche volumes finis, où les fonctions de base sont la fonction unité, l'intgration sur une cellule de contrôle C_i de l'équation (9) conduit à:

$$\int_{C_i} \frac{\partial \vec{W}}{\partial t} \, dv \, + \, \oint_{\partial C_i} \vec{\mathcal{F}} \, d\sigma \, + \, \int_{C_i} \vec{\vec{G}} \, \vec{\nabla} \vec{W} \, dv \; = \; 0 \quad . \tag{19}$$

Nous notons par $\vec{\mathcal{F}}$ la quantité $\vec{F}_x.n_1 + \vec{F}_y.n_2$, par ∂C_i la frontière de la cellule C_i. $\vec{n} = (n_1, n_2)^t$ est la normale sortante courante à cette frontière.

La méthode générale d'intégration utilisée dans cette étude est formellement équivalente à celle de la référence [1]. Détaillons la méthode de calcul des trois termes de l'équation précédente.

Nous exprimons l'avancement en temps par un schéma explicite d'ordre un:

$$\int_{C_i} \frac{\partial \vec{W}}{\partial t} \, dv \approx \left(\vec{W}^{n+1} - \vec{W}^n \right) \, \frac{\mathrm{supp}(C_i)}{\Delta t} \quad , \tag{20}$$

où $\mathrm{supp}(C_i)$ est le support de la cellule C_i, c'est-à-dire son volume en 3D, sa surface en 2D.

L'intégrale des flux conservatifs est exprimée par la somme des projections des fonctions de flux numériques $\vec{\Phi}(\vec{W}_i, \vec{W}_j, \vec{n})$ sur les facettes surfaciques ∂C_{ij} de ∂C_i du volume de contrôle. Ces facettes séparant deux cellules i et j de la discrétisation, cela se traduit par:

$$\oint_{\partial C_i} \vec{\mathcal{F}} \, d\sigma \approx \sum_{\partial C_{ij}} \vec{\Phi}(\vec{W}_i, \vec{W}_j, \vec{n}) \, \sigma_{ij} \quad . \tag{21}$$

La définition de la fonction de flux utilisée ici est donnée ci-dessous.

Le terme source est figé sur la cellule C_i. Cela permet de le sortir de l'intégrale, ce qui conduit à:

$$\int_{C_i} \vec{\vec{G}} \, \vec{\nabla} \vec{W} \, dv \approx \vec{\vec{G}}_i \int_{C_i} \vec{\nabla} \vec{W} \, dv \quad . \tag{22}$$

La divergence $\vec{\nabla} \vec{W}$ est calculée par une difference centrée sur la cellule. Dans le cadre d'une approche mixte volumes-finis éléments-finis, cela est équivalent à une formulation de Galerkin éléments-finis linéaire.

4.1 Définition de la fonction de flux

La fonction de flux utilisée est basée sur une décomposition de la différence de flux d'aprés Roe [2] qui s'écrit:

$$\vec{\Phi}(\vec{W}_i, \vec{W}_j, \vec{n}) \; = \; \frac{1}{2} \left[\vec{\mathcal{F}} \left(\vec{W}_i \right) + \vec{\mathcal{F}} \left(\vec{W}_j \right) - \left| \vec{\vec{A}}_{ij} \right| \left(\vec{W}_j - \vec{W}_i \right) \right] \quad , \tag{23}$$

où $\vec{W}_i$ et $\vec{W}_j$ désignent les états des deux cotés d'une interface partielle ∂C_{ij}. Le problème consiste à trouver une matrice $\vec{\vec{A}}_{ij}$ dans notre système non-conservatif qui donne une bonne résolution du saut à travers une discontinuité entre les deux noeuds i et j. La méthode de Roe [2] utilise les conditions de saut exactes pour la définition de $\vec{\vec{A}}_{ij}$, ce qui s'écrit ici:

$$\vec{\vec{A}}_{ij}\left[\vec{W}\right] = \left[\vec{\mathcal{F}}\right] + \left[\vec{P}\right] \quad . \tag{24}$$

Dans notre cas, se présentent trois situations différentes vis-à-vis de cette condition (24) :

- dans les schémas 1, 4 et 5 le bilan à travers une discontinuité permet de calculer les sauts de toutes les grandeurs qui interviennent dans le système principal (dans le cas 1 il s'agit des relations de Rankine–Hugoniot). Nous montrons que la matrice $\vec{\vec{A}}_{ij}$ correspond à la matrice du système complet $\vec{\vec{A}}$, appliquée à un état, dit "état de Roe", et noté $\widehat{\vec{W}}$:

$$\vec{\vec{A}}_{ij} = \vec{\vec{A}}\left(\widehat{\vec{W}}\right) \quad ,$$

  La détermination de $\widehat{\vec{W}}$ revient à déterminer les quantités exprimées dans $\vec{\vec{R}}$ et $\vec{\vec{R}}^{-1}$ par leur moyenne de Roe. Dans le cas "gaz réel", ces quantités sont:

$$\widehat{u} = \frac{\sqrt{\rho_i}u_i + \sqrt{\rho_j}u_j}{\sqrt{\rho_i} + \sqrt{\rho_j}} \quad ,$$

$$\widehat{v} = \frac{\sqrt{\rho_i}v_i + \sqrt{\rho_j}v_j}{\sqrt{\rho_i} + \sqrt{\rho_j}} \quad ,$$

$$\widehat{h}_l = \frac{\sqrt{\rho_i}h_{l_i} + \sqrt{\rho_j}h_{l_j}}{\sqrt{\rho_i} + \sqrt{\rho_j}} \quad ,$$

$$\widehat{k} = \frac{\sqrt{\rho_i}k_i + \sqrt{\rho_j}k_j}{\sqrt{\rho_i} + \sqrt{\rho_j}} \quad ,$$

  pour $l = 1, 4, 5$. Si nous définissons une température de Roe par

$$\widehat{T} = \frac{\sqrt{\rho_i}T_i + \sqrt{\rho_j}T_j}{\sqrt{\rho_i} + \sqrt{\rho_j}} \quad , \tag{25}$$

  et un coefficient polytropique de Roe par

$$\widehat{\gamma} = 1 + R\frac{T_i - T_j}{e_i - e_j} \quad . \tag{26}$$

  La vitesse du son de Roe sera obtenue par la relation:

$$\widehat{c}^2 = \widehat{\gamma}R\widehat{T} \quad . \tag{27}$$

- Dans les schéma 2 et 3, il nous manque une information sur le saut de la variable k qui intervient dans le système principal. Par conséquent, il n'existe pas d'état qui verifie la relation (24):

$$\nexists \quad \widehat{\vec{W}} \quad / \quad \vec{\vec{A}}\left(\widehat{\vec{W}}\right)\left[\vec{W}\right] = \left[\vec{\mathcal{F}}\right] \quad .$$

  Dans les calculs effectués, nous utiliserons comme approximation l'état classique rappelé précédemment.

- Dans le cas 6 où $\vec{P}$ est non-nul, une relation telle que la relation de Rankine-Hugoniot ne peut pas être écrite. En utilisant un chemin linéaire pour connecter les états de la variable k à travers une discontinuité [4], nous posons:

$$\vec{\vec{A}}_{ij}\left[\vec{W}\right] = \left[\vec{F}\right] + \vec{\vec{G}}\left[\vec{W}\right] \quad , \tag{28}$$

  avec $\vec{\vec{G}}=\vec{\vec{G}}\left(\overline{W}\right)$ évalué par une moyene arithmétique. L'état qui vérifie la condition (28) et qui permet en même temps de diagonaliser la matrice $\vec{\vec{A}}_{ij}$ s'écrit:

$$\widehat{u} = u^* \quad , \tag{29}$$

$$\widehat{v} = v^* \quad , \tag{30}$$

$$\hat{k} = \frac{5}{3}k^* + \frac{1}{5}\frac{\rho_j\,k_j + \rho_i\,k_i}{\sqrt{\rho_i}\sqrt{\rho_j}} \quad , \tag{31}$$

$$\hat{h_6} = h_6^* + \frac{4}{15}k^* - \frac{2}{15}\frac{\rho_j\,k_j + \rho_i\,k_i}{\sqrt{\rho_i}\sqrt{\rho_j}} \quad , \tag{32}$$

  où:

$$\varphi^* \equiv \frac{\sqrt{\rho_i}\,\varphi_i + \sqrt{\rho_j}\,\varphi_j}{\sqrt{\rho_i} + \sqrt{\rho_j}} \quad . \tag{33}$$

  $\widehat{\gamma}$ et $\widehat{c}^2$ voient leur définition inchangée.

Dans les schéma 1 à 3, où le système est découplé, le flux convectif du “scalaire passif” $\vec{W}^t = [\rho\,k]$ est calculé en fonction du flux de la masse volumique. On suit une proposition de Larrouturou [8]:

$$\Phi_{\rho\,k} \approx \Phi_\rho \overline{\left[\frac{\vec{W}^t}{\rho}\right]} \quad , \tag{34}$$

où les scalaires sont décentrés par le signe du flux de la masse volumique,

$$\overline{\left[\frac{\vec{W}^t}{\rho}\right]} = \begin{cases} \left.\frac{\vec{W}^t}{\rho}\right]_j & \text{si} \quad \Phi_\rho > 0 \\ \\ \left.\frac{\vec{W}^t}{\rho}\right]_i & \text{si} \quad \Phi_\rho \leq 0 \end{cases} \quad . \tag{35}$$

5 Résultats

5.1 Représentations de la vitesse du son

Nous définissons un nombre de Mach turbulent,

$$\mathrm{M}_t \equiv \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{\gamma\, p/\rho}} \quad , \tag{36}$$

qui exprime le rapport des deux pressions du système [1]. Le tableau 1 rassemble les vitesses du son en fonction du choix du système *hyperbolique approché* adopté et de M_t. S'y trouve égalament inclu le rapport entre la vitesse du son d'un système donné et la vitesse du son du système complet, qui est le système 6. Sur la figure 1 est tracé ce rapport des vitesses du son en fonction du nombre de Mach turbulent pour une valeur de $\gamma = \frac{7}{5}$. La distance entre la courbe correspondant au schéma i et celle correspondant au schéma 6, constante et égale à 1, représente l'erreur dans la prédiction de la vitesse de propagation commise par le système *hyperbolique approché* i. Pour des basses intensités de la turbulence, l'erreur est faible. Il est évident que le système 5 constitue le meilleur approche au système complet tandis que les choix du système 1 et 4 conduisent à une erreur plus importante en ce qui concerne la vitesse des caractéristiques $\lambda = \vec{v}\vec{n} \pm c_{systeme}$.

5.2 Résultats des calculs numériques

Afin de permettre une comparaison quantitative des solveurs basés sur les différentes systèmes présentés dans la section 3, nous avons choisi un cas test monodimensionnel. Il s'agit de plusieurs variantes du problème de tube à choc proposé par Sod et adapté pour le cas d'un écoulement turbulent par Hérard [1].

L'écoulement dans un tube à choc correspond à la solution d'un problème de Riemann entre deux gaz de valeurs initiales

$$\vec{Q}\,(t=0) = \begin{cases} \vec{Q}_L & x < x_0 \\ \vec{Q}_R & x > x_0 \end{cases} \quad , \tag{37}$$

séparés par une membrane qui est enlevée à l'instant $t = t_0$. Un système d'onde se développe, qui consiste en une détente se propageant à vitesse négative, une discontinuité de contact et un choc, ces deux derniers se propageant à vitesse positive. Les conditions initiales sont montrées dans le tableau 2. Les trois cas représentent le cas de Sod avec différents rapports

Tableau 1: Vitesses du son dans les différents systèmes; $D \equiv 1 + 10/9\,\mathrm{M}_t^2$

système	$c_{systeme}$	$\left[\dfrac{c_{systeme}}{c_6}\right]^2_{\gamma=\frac{7}{5}}$
1	c	$\dfrac{1}{D}$
2	$c\sqrt{1+(\gamma-1)\,\mathrm{M}_t^2}$	$\dfrac{1+2/5\,\mathrm{M}_t^2}{D}$
3	$c\sqrt{1+5/3\,(\gamma-1)\,\mathrm{M}_t^2}$	$\dfrac{1+2/3\,\mathrm{M}_t^2}{D}$
4	c	$\dfrac{1}{D}$
5	$c\sqrt{1+2/3\,\gamma\,\mathrm{M}_t^2}$	$\dfrac{1+14/15\,\mathrm{M}_t^2}{D}$
6	$c\sqrt{1+10/9\,\mathrm{M}_t^2}$	1

d'intensité turbulente initale. Dans le cas 2, la vitesse devient supersonique dans une partie du domaine.

La longueur du domaine et le temps final sont choisis de manière à permettre une séparation suffisante des ondes sans provoquer une réflexion aux frontières (voir tableau 3).

Mentionnons quelques détails concernant les paramètres numériques: le maillage est uniforme avec N noeuds. Nous utiliserons soit un maillage grossier avec $N = 100$, soit un maillage raffiné avec $N = 300$ (voir tableau 3). Les valeurs à gauche et à droite d'une interface de cellule ∂C_{ij} ne sont pas interpolées. Il s'agit donc d'une précision spatiale d'ordre un. Nous n'appliquons aucune correction pour des valeurs propres nulles dans la méthode de Roe (correction entropique). Le nombre caractéristique utilisé dans le calcul du pas de temps du schéma explicite est de CFL $= 0.5$. La méthode numérique a été codée et exécutée grâce au langage interprété YORICK [9].

Dans le cas 1, l'intensité turbulente initiale est relativement faible des deux cotés du diaphragme. En ce qui concerne les variables aérodynamiques, tous les six résultats sont équivalents. Sur les figures 2 à 4 nous avons

Tableau 2: Etats initiaux pour les calculs du tube à choc

	$\rho\left[\frac{kg}{m^3}\right]$	$\widetilde{u}\left[\frac{m}{s}\right]$	$p\left[\frac{kg\,m}{s}^2\right]$	$k\left[\frac{m^2}{s^2}\right]$	$\mathrm{M}_t^2\,\gamma$
cas 1					
L	1	0	10^5	10^5	$\frac{1}{100}$
R	$\frac{1}{8}$	0	10^4	$8\cdot 10^3$	$\frac{1}{100}$
cas 2					
L	1	0	10^5	10^5	1
R	$\frac{1}{8}$	0	10^4	$8\cdot 10^3$	$\frac{1}{100}$
cas 3					
L	1	0	10^5	10^2	$\frac{1}{1000}$
R	$\frac{1}{8}$	0	10^4	$8\cdot 10^3$	$\frac{1}{10}$

Tableau 3: Quelques détails numériques

L	x_0	$t-t_0$	N
$10m$	$5m$	$6\cdot 10^{-3}s$	100 ; 300

tracé une seule courbe qui représente les six résultats. Nous notons que la grandeur $p+\frac{2}{3}\,\rho\,k$ qui est une invariante à travers d'une onde $\lambda=\vec{v}\,\vec{n}$ est ici numériquement constant entre $x=6m$ et $x=8m$ (la zone où il se trouve la discontinuité de contact dans cet exemple). La seule différence entre les systèmes *hyperboliques approchés* se voit sur la figure 5 où l'énergie cinétique turbulente k est tracée. Le niveau de k prédit par le schéma de référence (système 6) est plus élevé que celui obtenu avec les autres systèmes. Il est surprenant que les prédictions des systèmes 1 à 5 soient identiques malgré les différences dans le décentrement des flux.

Dans le cas test 2, l'intensité de la turbulence est trés élevée du coté gauche et relativement faible du coté droit du diaphragme. Ici, nous obtenons des résultats visiblement distincts entre les six schémas. Afin de permettre une meilleure distinction visuelle nous ne montrons que les résultats obtenus avec le maillage grossier de $N = 100$ noeuds pour ce cas test. Sur les figures 6 à 9 nous n'incluons que les prédictions du schéma 1 en comparaison avec celles du schéma 6 pour donner une impression globale. Il s'agit du traitement le plus simplifié (sys. 1) ainsi que de la méthode de référence (sys. 6). Dans le résultats su système 1 nous constatons notamment une perte de monotonie (undershoot) au niveau du raccord entre la détente ($\lambda = u - c$) et la zone simple qui suit à droite. Afin de permettre une comparaison plus fine de tous les six systèmes, nous avons tracé un agrandissement de cette zone sur la figure 11, où la vitesse est représentée. La magnitude d'erreur varie dans le même sens entre les résultats obtenus avec les différentes systèmes que l'erreur commise sur la vitesse de propagation $\lambda = u - c$ (voir remarques du paragraphe 5.1). La solution du système 5 est en effet très proche de la référence; les traitements 1 et 4 sont presque identiques. Les prédictions basées sur les sytèmes 2 et 3 se situent entre ceux-ci. Sur la figure 10 nous avons tracé un zoom des tensions normales. Nous constatons que seuls les schémas 5 et 6 vérifient l'invariance de cette grandeur à travers la discontinuité de contact pour un cas de telle intensité turbulente.

Le cas 3 complète les essais numériques. Ici, le rapport des intensités initiales de la turbulence est l'inverse du cas précédent. Une zone presque laminaire précède la croissance de k à travers la discontinuité de contact à $x \approx 6.3m$. Aucune différence n'est visible entre les six résultats en ce qui concerne les variables aérodynamiques. Comme dans le cas 1, la prédiction du plateau de k entre $x \approx 7m$ et $x \approx 8m$ est la seule distinction entre les schémas.

6 Conclusions

Nous avons étudié, dans une première partie, la partie hyperbolique du système issu d'une fermeture au premier ordre des équations de Navier-Stokes moyennées. Nous avons présenté différents choix de la partie *hyperbolique approchée* qui s'appliquent au traitement numérique de la partie hyperbolique complète dans la cadre d'une méthode caractéristique. Nous avons donné les vitesses caractéristiques pour chaque cas ainsi que les matrices de passages nécessaires pour la diagonalisation des systèmes respectifs.

Dans une deuxième partie, nous avons détaillé notre méthode de résolution numérique par décomposition de différences de flux. La condition de Roe pour déterminer la matrice de décentrement ne peut pas être vérifié dans tous les cas. Les calculs d'un tube à choc turbulent montrent l'équivalence des systèmes à basse intensité de la turbulence sauf pour la prédiction de l'énergie cinétique turbulente. Pour des niveaux de k importants, nous enregistrons une perte de monotonie autour de l'onde $\lambda = u - c_{systeme}$ dans les résultats obtenus avec un décentrement basé sur des systèmes *hyperboliques approchés*. Cet erreur semble être proportionelle à la différence entre la vitesse du son de la partie hyperbolique complète et celle de la partie *hyperbolique approchée* correspondante.

Le lecteur qui souhaite choisir un des systèmes proposés doit considerer le coût du calcul. Le couplage des équations nécessite des opérations matricielles plus lourdes. Nos expériences numériques ne permettent pas une quantification de cette différence puisque la langage YORICK ne produit pas un code optimisé. Néanmoins, d'aprés nos résultats il est évident que parmi les systèmes découplés, le système 3 est le meilleur choix. Si l'on décide de coupler la phase "aéro" avec l'équation sur k, nous conseillons l'utilisation du système complet (système 6) pour la construction du solveur. La moyenne qui vérifie la condition de Roe est plus complexe dans ce cas et par conséquent elle est plus coûteux à calculer. Pour éviter ce surcoût, on peut simplement utiliser une moyenne arithmétique [1] pour calculer la matrice de décentrement: $\vec{\vec{A}}_{ij}=\vec{\vec{A}}\left(\frac{1}{2}(\vec{W}_i + \vec{W}_j)\right)$. Ce choix donne des résultats pratiquement équivalents à la formulation (29) à (32) comme il est montré sur les figures 12 à 13.

Références

[1] J.M. Hérard. Solveur de Riemann approché pour un système hyperbolique non conservatif issu de la turbulence compressible. Technical Report HE-41/95/009/A, EDF Chatou, 1995.

[2] P. L. Roe. Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes. *Journal of Computational Physics*, 43, 1981.

[3] J. M. Morisson. Flux difference split schemes for turbulent transport equations. Technical Report AIAA paper No. 90-5251, American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1990.

[4] J.M. Hérard, A. Forestier, and X. Louis. A non strictly hyperbolic system to describe compressible turbulence. Technical Report HE-41/94.11 A, EDF Chatou, 1994.

[5] T.H. Shih and J.L. Lumley. Remarks on turbulent constitutive relations. *Math.Comput.Modelling*, 18(2):9–16, 1993.

[6] C. G. Speziale. On nonlinear k-l and k-ϵ models of turbulence. *J. Fluid Mech.*, 178:459–475, 1987.

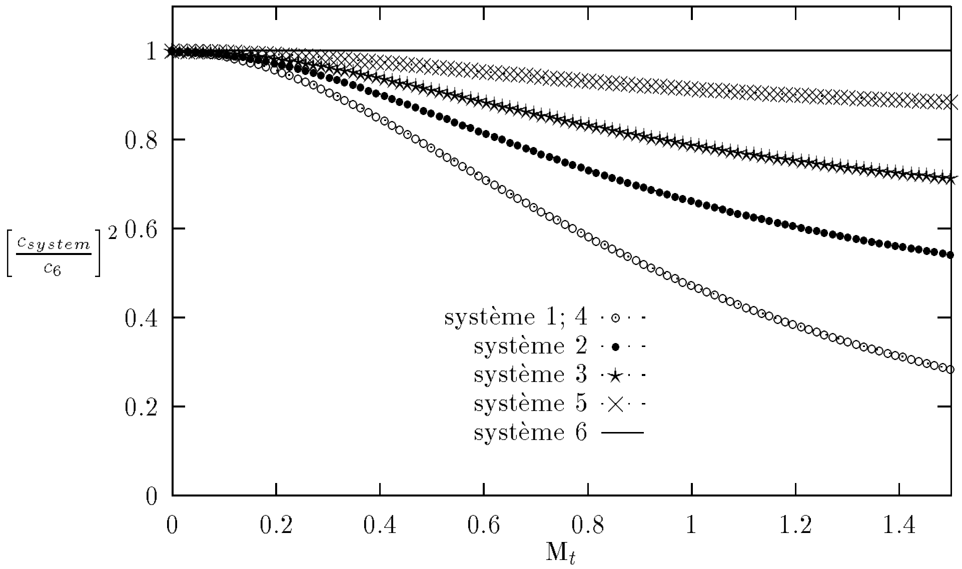
[7] A. Favre, L.S.G. Kovasznay, R. Dumas, J. Gaviglio, and M. Coantic. *La turbulence en mécanique des fluides.* Gauthier-Villars, publié avec le concours du CNRS, 1976.

[8] B. Larrouturou. How to preserve the mass fractions positivity when computing compressible multi-component flows. *J.Comp.Phys.*, 95:59–84, 1991.

[9] D.H. Munro. *Yorick: an interpreted language.* Regents of the University of California, 1994.

Figures

Figure 1: Rapport des vitesses du son en fonction du Mach turbulent, $\gamma = \frac{7}{5}$



Cas 1

Figure 2: Variation de la masse volumique, cas 1, $N = 300$

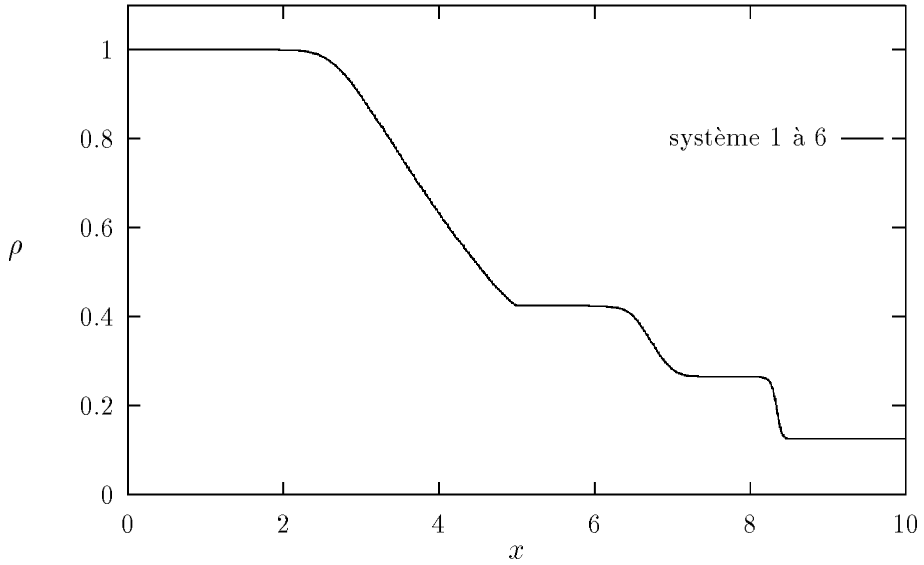


Figure 3: Variation de la somme des tensions normales, cas 1, $N = 300$

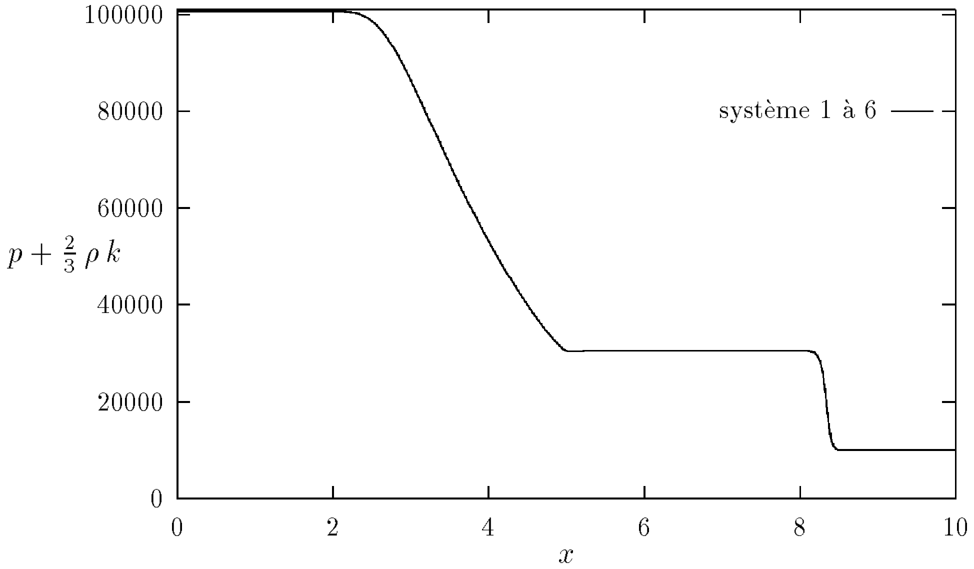


Figure 4: Variation de la quantité de mouvement et de la vitesse, cas 1, $N = 300$

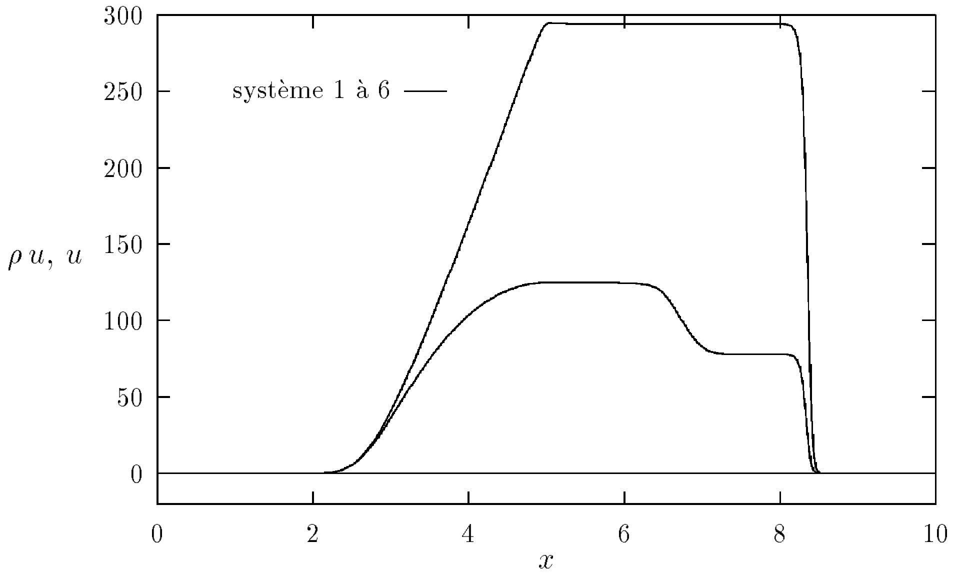
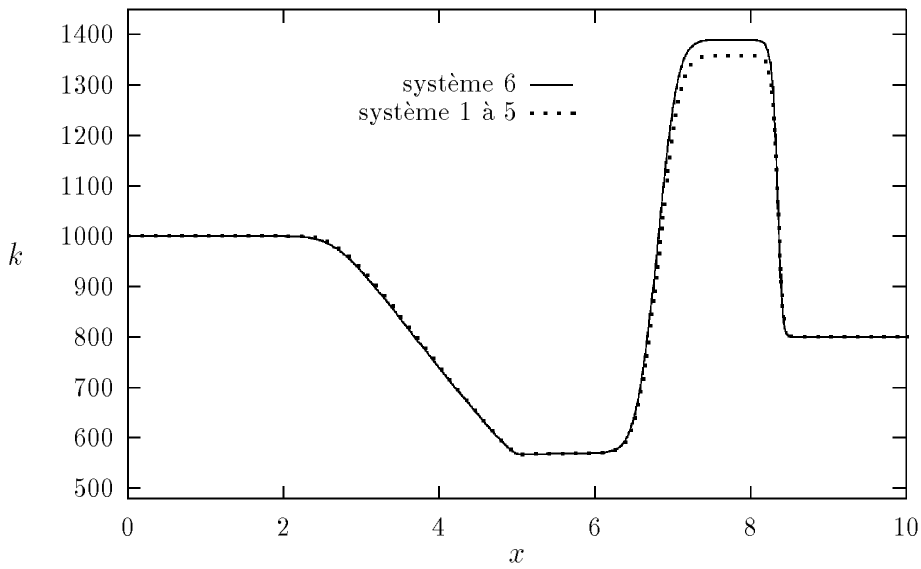


Figure 5: Variation de l'énergie cinétique turbulente, cas 1, $N = 300$



Cas 2

Figure 6: Variation de la masse volumique, cas 2, $N = 100$, résultats avec système 6 et 1

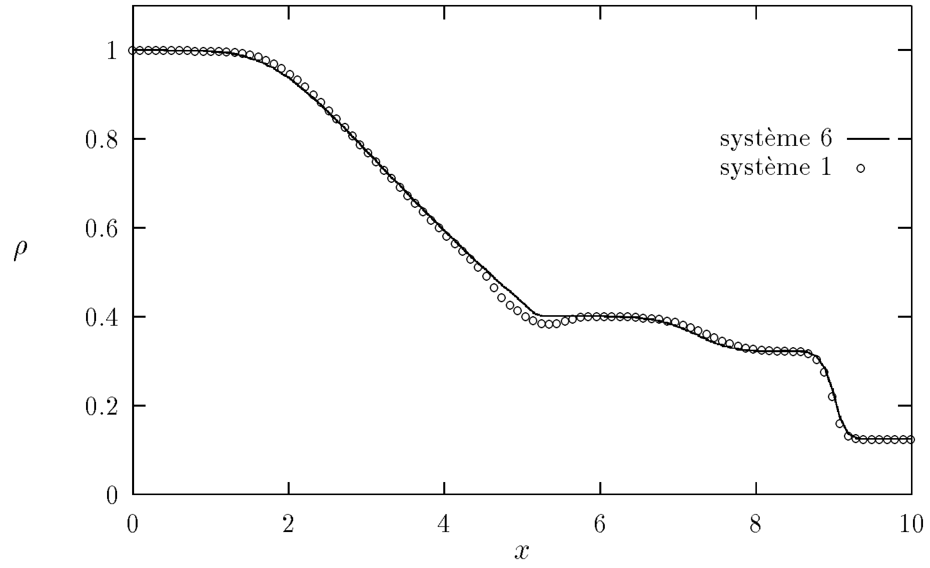


Figure 7: Variation de la somme des tensions normales, cas 2, $N = 100$, résultats avec système 6 et 1

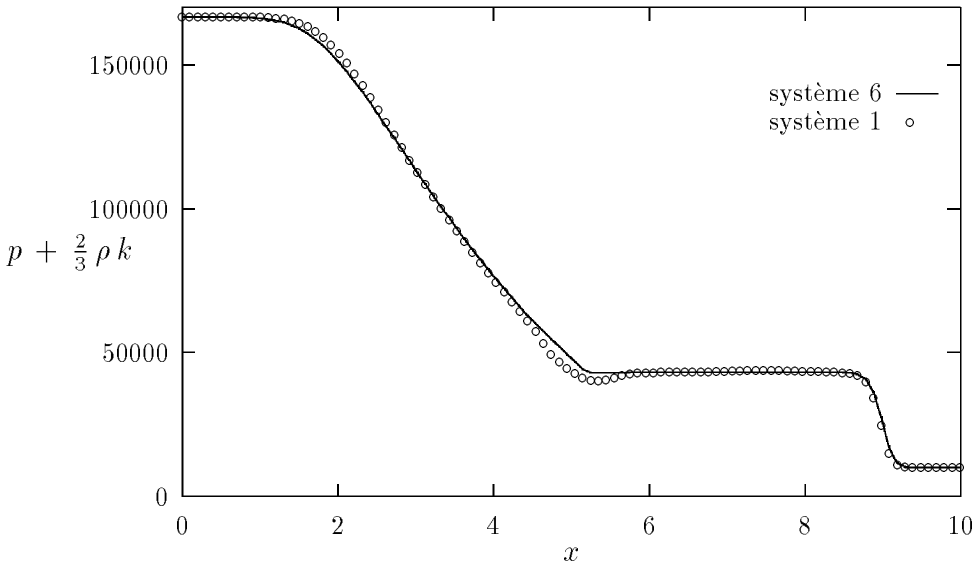


Figure 8: Variation de la pression, cas 2, $N = 100$, résultats avec système 6 et 1

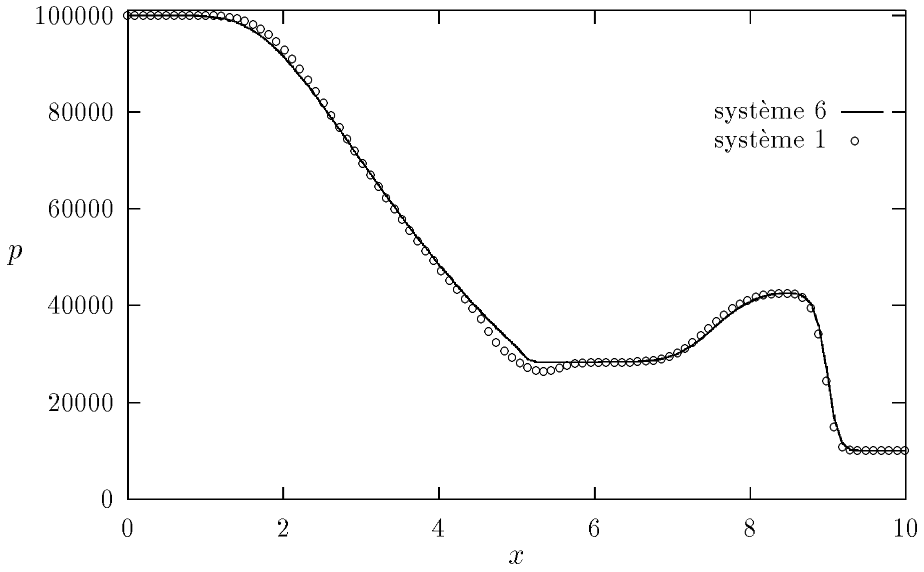


Figure 9: Variation de la vitesse, cas 2, $N = 100$, résultats avec système 6 et 1

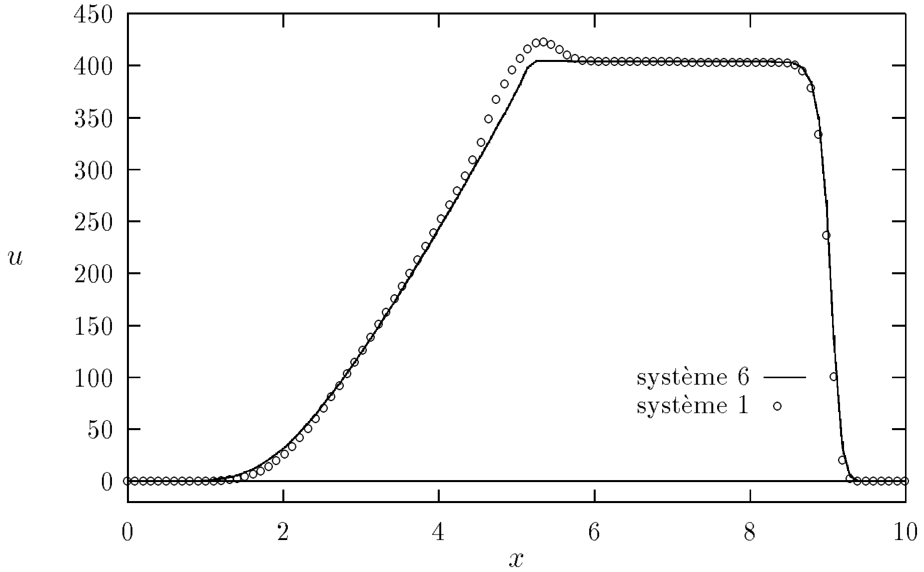


Figure 10: Variation de la somme des tensions normales, cas 2, $N = 100$, agrandissement, tous systèmes

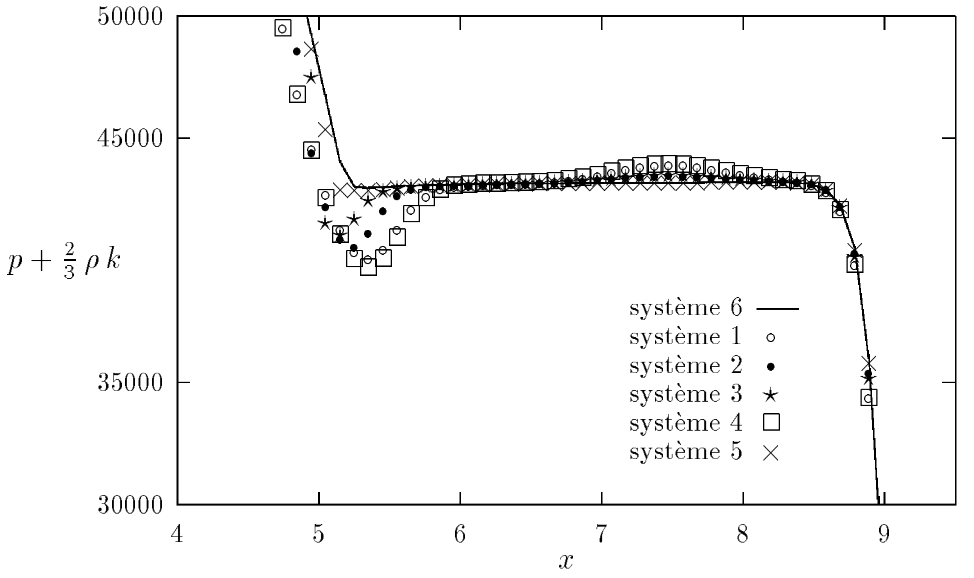


Figure 11: Variation de la vitesse, cas 2, $N = 100$, agrandissement, tous systèmes

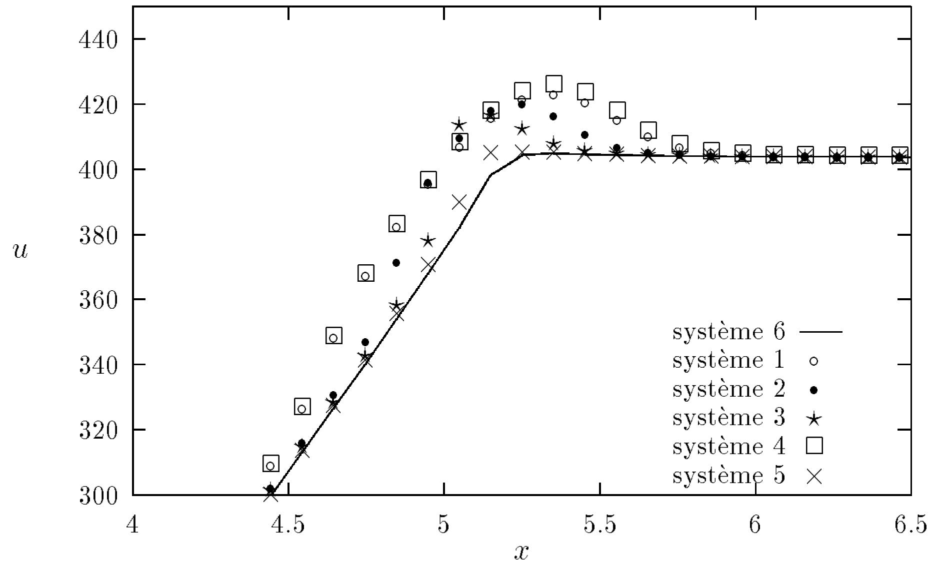


Figure 12: Variation de la vitesse, cas 2, $N = 100$, agrandissement, système 6, moyenne arithmétique et moyenne selon condition de Roe

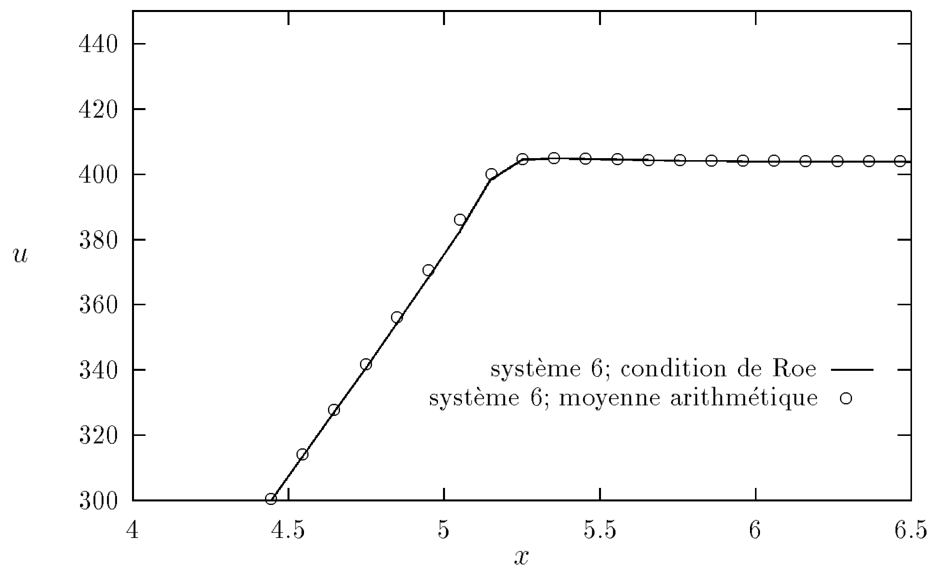
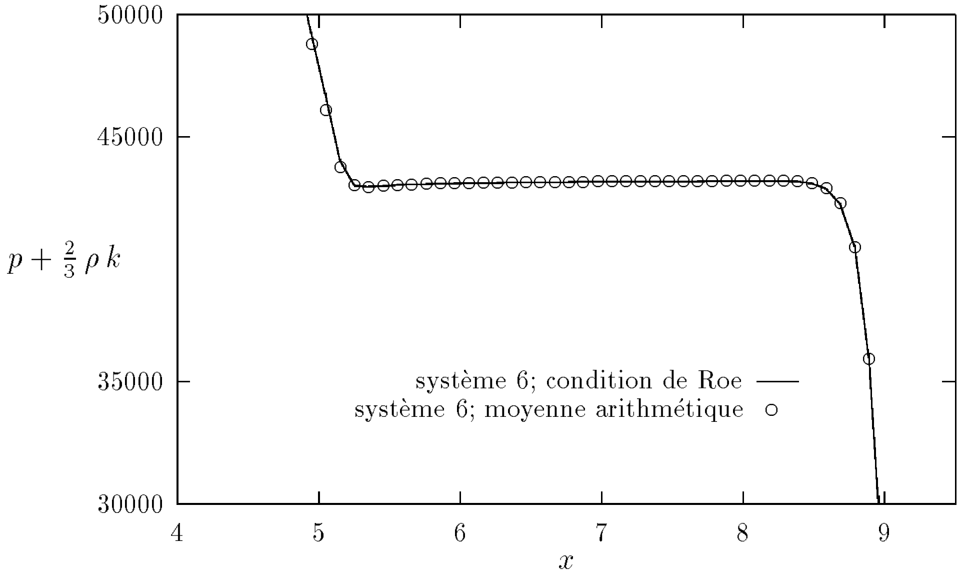


Figure 13: Variation de la somme des tensions normales, cas 2, $N = 100$, agrandissement, système 6, moyenne arithmétique et moyenne selon condition de Roe



Cas 3

Figure 14: Variation de la masse volumique, cas 3, $N = 300$

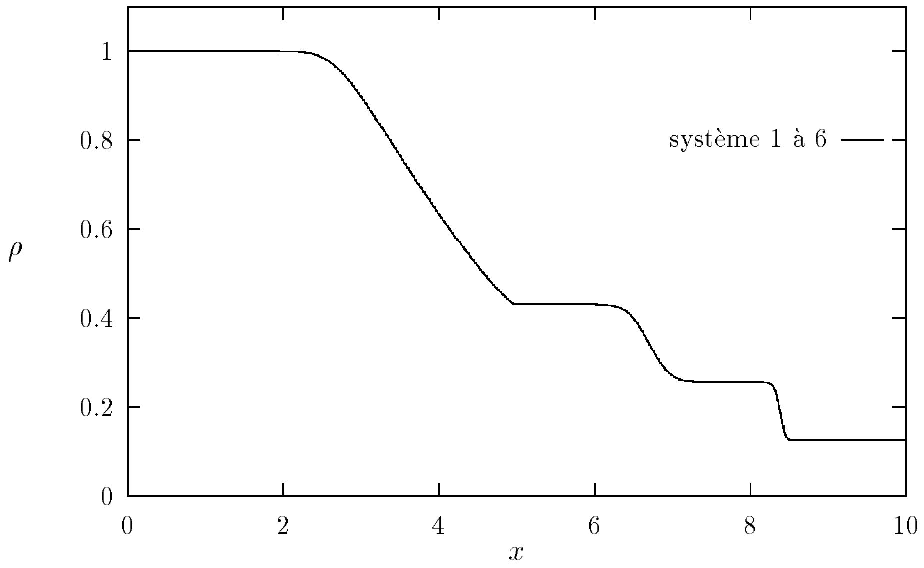


Figure 15: Variation de la somme des tensions normales, cas 3, $N = 300$

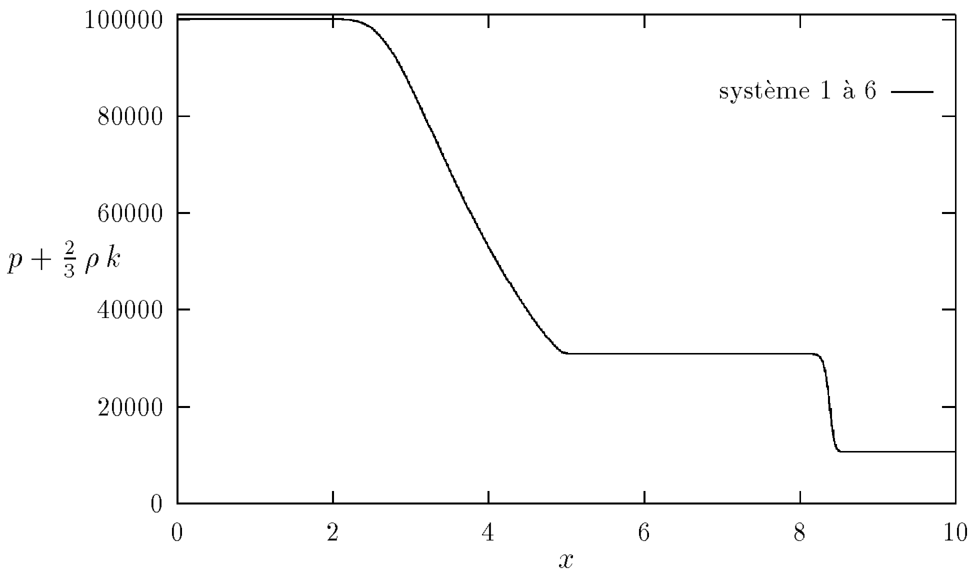


Figure 16: Variation de la quantité de mouvement et de la vitesse, cas 3, $N = 300$

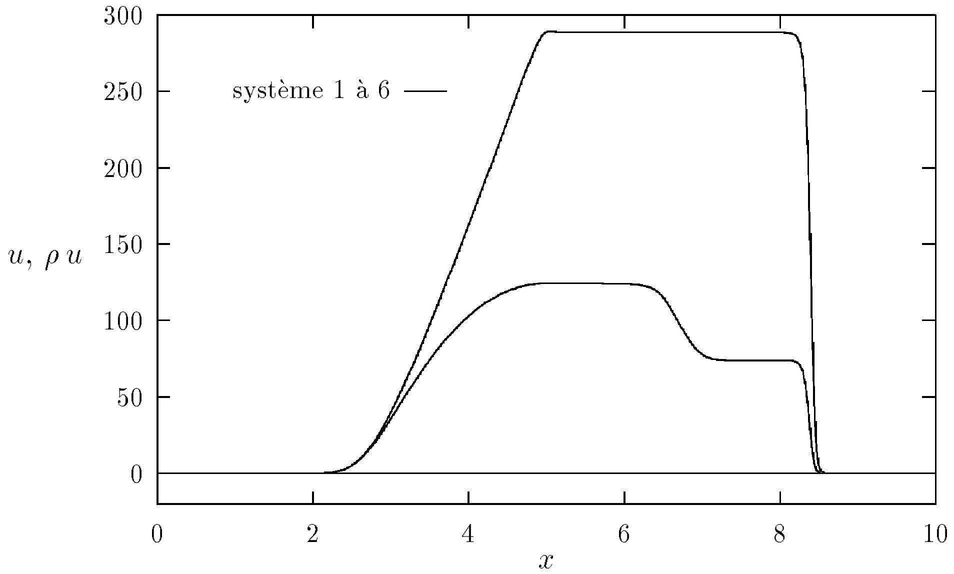


Figure 17: Variation de l'énergie cinétique turbulente, cas 3, $N = 300$