RAPPORT INTERNE
Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique, Ecole Centrale de Lyon

Solveur pour le système des équations hyperboliques non-conservatives issu d'un modèle de transport des tensions de Reynolds

Markus Uhlmann

Novembre 1995

Table de matières

1 Introduction

Dans le cadre d'une description statistique des écoulements turbulents les corrélations inconnues qui sont créées par le processus de moyennage nécessitent une modélisation. Il est largement admis [1, 2, 3, 4] qu'une fermeture au second ordre a des potentialités prédictives qui sont supérieures aux modèles algébriques du type k-ϵ.

D'un point de vue mathématique l'ensemble des équations de transport issue d'un modèle au second ordre (équations de Navier-Stokes plus une équation pour chaque composante du tenseur des tensions turbulentes) représente un système couplé d'une complexité importante. La résolution numérique de ce système est en général entreprise par l'extension d'un solveur conçu pour un modèle à deux équations. On trouve dans la littérature des solveurs basés sur des schémas centrés [5, 6] aussi bien que sur l'utilisation des schémas décentrés. Le décentrement est souvent approximatif: il est basé sur des considérations scalaires [7], sur le système de la dynamique de gaz (Euler) [8] ou sur un pseudo-système de convection qui ne regroupe pas tous les termes hyperboliques [9].

L'objectif de cette étude est le traitement de la partie hyperbolique issu du système des équations au second ordre. Afin d'obtenir une décomposition des flux selon le signe des vitesses caractéristiques on considère la propagation d'ondes des équations couplées. Celles-ci apparaissent sous forme non-conservative à cause des termes de production. On se base sur le travail de Hérard et al. [10] et Hérard [11] qui porte sur des systèmes hyperboliques issus d'un modèle k-ϵ ou des écoulements diphasiques.

Le plan de ce rapport est le suivant: dans le chapitre 2 on donne une classification analytique du système des équations avant de décrire le schéma de résolution numérique dans le chapitre 3. Ensuite on présente les résultats des calculs numériques sur un cas test pseudo-monodimensionnel (chapitre 4) avant de donner des conclusions de ce travail dans le chapitre 5.

2 Classification du système

On considère ici le système des équations de conservation de la masse volumique moyenne $\overline{\rho}$, de la quantité de mouvement moyenne $\overline{\rho}\vec{v}$, de l'énergie totale moyenne $\overline{\rho}\widetilde{e}_T$ et des composantes du tenseur turbulent $\overline{\rho}\widetilde{u_i''u_j''}$. Le vecteur des variables s'écrit pour un écoulement bidimensionel:

$$\vec{Q} \;=\; \left[\overline{\rho},\, \overline{\rho}\widetilde{u},\, \overline{\rho}\widetilde{v},\, \overline{\rho}\widetilde{e}_t,\, \overline{\rho}\widetilde{u''u''},\, \overline{\rho}\widetilde{v''v''},\, \overline{\rho}\widetilde{u''v''},\, \overline{\rho}k\right]^T \quad . \tag{1}$$

A la place de la troisième composante diagonale du tenseur de Reynolds on a choisi l'énergie cinétique turbulente $\overline{\rho}k \equiv \frac{\overline{\rho}}{2}\widetilde{u_i''u_i''}$ comme variable.

La partie hyperbolique des équations de bilan associées s'écrit:

$$\partial_t\vec{Q} \,+\, \nabla\vec{F} \,=\, \overline{\overline{G}}\,\nabla\vec{Q} \quad . \tag{2}$$

Le système précédent se met sous la forme quasi-linéaire

$$\partial_t\vec{Q} \,+\, \overline{\overline{A}}\nabla\vec{Q} \,=\, 0 \quad , \tag{3}$$

avec

$$\overline{\overline{A}} \,=\, \frac{\partial\vec{F}}{\partial\vec{Q}} \,+\, \overline{\overline{G}} \quad . \tag{4}$$

La matrice jacobienne des flux s'écrit:

$$\frac{\partial\vec{F}}{\partial\vec{Q}} \,=\, J \,=$$
$$\begin{bmatrix}
0 & n_x & n_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
n_x\Phi - u\vec{v}\vec{n} & \begin{matrix}\vec{v}\vec{n}\\ -un_x\gamma_2\end{matrix} & un_y - vn_x\Gamma_1 & n_x\Gamma_1 & -\frac{n_x}{2}\Gamma_3 & -\frac{n_x\Gamma_1}{2} & -\frac{n_x\Gamma_1}{2} & n_y \\
n_y\Phi - v\vec{v}\vec{n} & vn_x - un_y\Gamma_1 & \begin{matrix}\vec{v}\vec{n}\\ -vn_y\Gamma_2\end{matrix} & n_y\Gamma_1 & -\frac{n_y\Gamma_1}{2} & -\frac{n_y}{2}\Gamma_3 & -\frac{n_y\Gamma_1}{2} & n_x \\
\begin{matrix}\vec{v}\vec{n}\Phi - \vec{v}\vec{n}H_t\\ -n_x\left(\widetilde{uu}u + \widetilde{uv}v\right)\\ -n_y\left(\widetilde{uv}u + \widetilde{vv}v\right)\end{matrix} & \begin{matrix}n_xH_t - \vec{v}\vec{n}\Gamma_1 u\\ +\widetilde{uu}n_x + \widetilde{uv}n_y\end{matrix} & \begin{matrix}n_yH_t - \vec{v}\vec{n}\Gamma_1 v\\ +\widetilde{uv}n_x + \widetilde{vv}n_y\end{matrix} & \vec{v}\vec{n}\gamma & \begin{matrix}un_x -\\ \frac{\vec{v}\vec{n}\Gamma_1}{2}\end{matrix} & \begin{matrix}vn_y -\\ \frac{\vec{v}\vec{n}\Gamma_1}{2}\end{matrix} & -\frac{\vec{v}\vec{n}\Gamma_1}{2} & \vec{v}\vec{n} \\
-\widetilde{uu}\vec{v}\vec{n} & \widetilde{uu}n_x & \widetilde{uu}n_y & 0 & \vec{v}\vec{n} & 0 & 0 & 0 \\
-\widetilde{vv}\vec{v}\vec{n} & \widetilde{vv}n_x & \widetilde{vv}n_y & 0 & 0 & \vec{v}\vec{n} & 0 & 0 \\
-\widetilde{ww}\vec{v}\vec{n} & \widetilde{ww}n_x & \widetilde{ww}n_y & 0 & 0 & 0 & \vec{v}\vec{n} & 0 \\
-\widetilde{uv}\vec{v}\vec{n} & \widetilde{uv}n_x & \widetilde{uv}n_y & 0 & 0 & 0 & 0 & \vec{v}\vec{n}
\end{bmatrix} \tag{5}$$

et la contribution issue du terme de production:

$$\overline{\overline{G}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \begin{matrix} -2\,(n_x\,\widetilde{uu}\,u \\ +n_y\,\widetilde{uv}\,u) \end{matrix} & \begin{matrix} 2\,n_x\,\widetilde{uu} \\ +2\,\widetilde{uv}\,n_y \end{matrix} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \begin{matrix} -2\,(n_x\,\widetilde{uv}\,v \\ +n_y\,\widetilde{vv}\,v) \end{matrix} & 0 & \begin{matrix} 2\,\widetilde{uv}\,n_x \\ +2\,n_y\,\widetilde{vv} \end{matrix} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \begin{matrix} -\widetilde{uu}\,vn_x - \widetilde{uv}\,un_x \\ -\widetilde{uv}\,vn_y - \widetilde{vv}\,un_y \end{matrix} & \widetilde{uv}\,n_x + n_y\,\widetilde{vv} & n_x\,\widetilde{uu} + \widetilde{uv}\,n_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \begin{matrix} -\widetilde{uu}\,un_x - \widetilde{uv}\,vn_x \\ -\widetilde{uv}\,un_y - \widetilde{vv}\,vn_y \end{matrix} & \widetilde{uu}\,n_x + n_y\,\widetilde{uv} & n_x\,\widetilde{uv} + \widetilde{vv}\,n_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \quad (6)$$

On note $\Gamma_1 \equiv \gamma-1$, $\Gamma_2 \equiv \gamma-2$, $\Gamma_3 \equiv \gamma-3$. Afin de faciliter des manipulations matricielles, on peut transformer le système en un système qui régit des variables “primitives”:

$$\vec{P} = \left[\overline{\rho},\, \tilde{u},\, \tilde{v},\, \overline{p},\, \widetilde{u''u''},\, \widetilde{v''v''},\, \widetilde{u''v''},\, k\right]^T \quad . \qquad (7)$$

La transformation par les matrices de passages

$$M = \frac{\partial \vec{P}}{\partial \vec{Q}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v & 0 & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{2} + \frac{\widetilde{uu}}{2} + \frac{\widetilde{vv}}{2} + \frac{\widetilde{ww}}{2} & \rho\,u & \rho\,v & \frac{1}{\Gamma_1} & \frac{\rho}{2} & \frac{\rho}{2} & \frac{\rho}{2} & 0 \\ \widetilde{uu} & 0 & 0 & 0 & \rho & 0 & 0 & 0 \\ \widetilde{vv} & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho & 0 & 0 \\ \widetilde{ww} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho & 0 \\ \widetilde{uv} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho \end{bmatrix}, \quad (8)$$

et

$$
M^{-1} = \begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{u}{\rho} & \rho^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{v}{\rho} & 0 & \rho^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{(u^2+v^2)\Gamma_1}{2} & -u\,\Gamma_1 & -v\,\Gamma_1 & \Gamma_1 & -\frac{\Gamma_1}{2} & -\frac{\Gamma_1}{2} & -\frac{\Gamma_1}{2} & 0 \\
-\frac{\widetilde{uu}}{\rho} & 0 & 0 & 0 & \rho^{-1} & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{\widetilde{vv}}{\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho^{-1} & 0 & 0 \\
-\frac{\widetilde{ww}}{\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho^{-1} & 0 \\
-\frac{\widetilde{uv}}{\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho^{-1}
\end{bmatrix} , \tag{9}
$$

nous mène au nouveau système suivant:

$$
\partial_t \vec{P} \, + \, \tilde{A} \nabla \vec{P} \, = \, 0 \quad , \tag{10}
$$

avec

$$
\tilde{A} \, \equiv \, M \cdot \overline{\overline{A}} \cdot M^{-1} \, =
$$

$$
\begin{bmatrix}
\vec{v}\vec{n} & n_x\,\rho & n_y\,\rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{n_x\,\widetilde{uu}}{\rho} + \frac{\widetilde{uv}\,n_y}{\rho} & \vec{v}\vec{n} & 0 & \frac{n_x}{\rho} & n_x & 0 & 0 & n_y \\
\frac{n_y\,\widetilde{vv}}{\rho} + \frac{\widetilde{uv}\,n_x}{\rho} & 0 & \vec{v}\vec{n} & \frac{n_y}{\rho} & 0 & n_y & 0 & n_x \\
0 & \rho\,n_x\,\tilde{c}^2 & \rho\,n_y\,\tilde{c}^2 & \vec{v}\vec{n} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 2\,(n_x\,\widetilde{uu} + n_y\,\widetilde{uv}) & 0 & 0 & \vec{v}\vec{n} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 2\,(n_x\,\widetilde{uv} + n_y\,\widetilde{vv}) & 0 & 0 & \vec{v}\vec{n} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vec{v}\vec{n} & 0 \\
0 & n_x\,\widetilde{uv} + n_y\,\widetilde{vv} & n_x\,\widetilde{uu} + n_y\,\widetilde{uv} & 0 & 0 & 0 & 0 & \vec{v}\vec{n}
\end{bmatrix} . \tag{11}
$$

Le calcul des valeurs propres λ_i qui sont solutions de l'équation

$$
\det \left[\overline{\overline{A}} \, - \, \overline{\overline{I}} \, \lambda_i \right] \, = \, 0 \quad , \tag{12}
$$

ou de manière équivalente

$$
\det \left[\tilde{A} \, - \, \overline{\overline{I}} \, \lambda_i \right] \, = \, 0 \quad , \tag{13}
$$

donne:

$$
\begin{aligned}
\lambda_{1\ldots4} &= \vec{v}\vec{n} \\
\lambda_{5,6} &= \vec{v}\vec{n} \pm \sqrt{\Phi} \\
\lambda_{7,8} &= \vec{v}\vec{n} \pm \sqrt{3\,\Phi \, + \, \tilde{c}^2} \\
\Phi &= n_x^2 \widetilde{u''u''} + 2 n_x n_y \, \widetilde{u''v''} + n_y^2 \, \widetilde{v''v''} \quad .
\end{aligned} \tag{14}
$$

On constate tout d'abord le point suivant concernant l'hyperbolicité du système:

> *Les valeurs propres* (14) *sont réelles pour des états fortement réalisables (dans le sens de Schumann* [12]*) des variables turbulentes.*

Afin de construire un schéma basé sur les méthodes des caractéristiques, on souhaite pouvoir diagonaliser la matrice du système $\overline{\overline{A}}$. Cela peut être impossible du fait de l'ordre de multiplicité d'une des valeurs propres, qui est supérieur au nombre des vecteurs propres linéaires indépendants associés. Ici, le problème pourrait se poser pour le cas où Φ est nul. Comme montré dans l'annexe A on trouve que:

> *La matrice du système $\overline{\overline{A}}$ est toujours diagonalisable si, en plus de la réalisabilité, le déterminant de la matrice des corrélations doubles de vitesse est initialement non-nul.*

Pour la diagonalisation on se place dans un repère cartésien $[n, t]$ qui est aligné avec le vecteur $\vec{n}$, c'est-à-dire que l'axe n est normal à l'interface de la cellule d'intégration, l'axe t est tangentiel. Par cette rotation du repère on obtient le système suivant:

$$\partial_t \vec{\hat{Q}} + \hat{A} \nabla \vec{\hat{Q}} = 0 \quad , \tag{15}$$

avec le vecteur des variables locales:

$$\vec{\hat{Q}} = [\,\overline{\rho},\, \overline{\rho}\widetilde{u}_n,\, \overline{\rho}\widetilde{u}_t,\, \overline{\rho}\widetilde{e}_t,\, \overline{\rho}\tau_{nn},\, \overline{\rho}\tau_{tt},\, \overline{\rho}\tau_{nt},\, \overline{\rho}k\,]^T \quad . \tag{16}$$

La transformation de la matrice du système s'écrit:

$$\hat{A} = B\,\overline{\overline{A}}\,B^{-1} \quad , \tag{17}$$

où les matrices de passage s'écrivent:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_x & n_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -n_y & n_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & {n_x}^2 & {n_y}^2 & 2\,n_x\,n_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & {n_y}^2 & {n_x}^2 & -2\,n_x\,n_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -n_x\,n_y & n_x\,n_y & {n_x}^2 - {n_y}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \tag{18}$$

et

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_x & -n_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_y & n_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & {n_x}^2 & {n_y}^2 & -2\,n_x\,n_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & {n_y}^2 & {n_x}^2 & 2\,n_x\,n_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & n_x\,n_y & -n_x\,n_y & {n_x}^2 - {n_y}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad . \tag{19}$$

Pour calculer les matrices de passage de la diagonalisation, on travaille d'abord dans le système des variables primitives $\vec{P}$ écrit dans le repère local $[n, t]$:

$$\partial_t \vec{\hat{P}} \,+\, \hat{\tilde{A}} \nabla \vec{\hat{P}} \,=\, 0 \quad . \tag{20}$$

On obtient

$$\hat{\tilde{A}} \,=\, L\,\hat{\Lambda}\,L^{-1} \quad , \tag{21}$$

avec les valeurs propres exprimées en variables locales:

$$\hat{\Lambda} \,=\, \mathrm{diag}\,[\tilde{u}_n, \tilde{u}_n, \tilde{u}_n, \tilde{u}_n, \tilde{u}_n + c_1, \tilde{u}_n - c_1, \tilde{u}_n + c_2, \tilde{u}_n + c_2] \quad , \tag{22}$$

et les matrices de passage associées

$$L^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2\,\tau_{nn}}{\rho} & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tau_{nn} & -\frac{\rho\,c^2}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\tau_{nn}^2 + {\tau_{nt}}^2 & 0 & -2\,\tau_{nt}\,\tau_{nn} & 2\,\tau_{nn}^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & {\tau_{nt}}^2 & \tau_{nn}^2 & -2\,\tau_{nt}\,\tau_{nn} & 0 \\ -\frac{\tau_{nt}\,c^2}{2} & \sqrt{\tau_{nn}}\tau_{nt}\,\rho & -\frac{\sqrt{\tau_{nn}}\rho\left(c_2^2 - \tau_{nn}\right)}{2} & \tau_{nt} & \rho\,\tau_{nt} & 0 & -\frac{\rho\left(c_2^2 - \tau_{nn}\right)}{2} & 0 \\ -\frac{\tau_{nt}\,c^2}{2} & -\sqrt{\tau_{nn}}\tau_{nt}\,\rho & \frac{\sqrt{\tau_{nn}}\rho\left(c_2^2 - \tau_{nn}\right)}{2} & \tau_{nt} & \rho\,\tau_{nt} & 0 & -\frac{\rho\left(c_2^2 - \tau_{nn}\right)}{2} & 0 \\ \tau_{nn} & c_2\rho & 0 & 1 & \rho & 0 & 0 & 0 \\ \tau_{nn} & -c_2\rho & 0 & 1 & \rho & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} , \tag{23}$$

$$
L = \left[\begin{array}{cccccccc}
\frac{\rho\left(c_2^2-\tau_{nn}\right)}{2\,\tau_{nn}\,c_2^2} & -\frac{1}{\tau_{nn}\,c_2^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6\,\tau_{nn}+2\,c^2} & \frac{1}{6\,\tau_{nn}+2\,c^2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2\,c_2} & -\frac{1}{2\,c_2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{\tau_{nn}}\rho\left(c_2^2-\tau_{nn}\right)} & \frac{1}{\sqrt{\tau_{nn}}\rho\left(2\,\tau_{nn}+c^2\right)} & \frac{\tau_{nt}}{\rho\left(c_2^2-\tau_{nn}\right)c_2} & -\frac{\tau_{nt}}{\rho\left(2\,\tau_{nn}+c^2\right)c_2} \\
-\frac{\rho\,c^2}{6\,\tau_{nn}+2\,c^2} & \frac{3}{c_2^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{c^2}{6\,\tau_{nn}+2\,c^2} & \frac{c^2}{6\,\tau_{nn}+2\,c^2} \\
-\frac{\tau_{nn}}{c_2^2} & -\frac{2}{c_2^2\,\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\tau_{nn}}{c_2^2\,\rho} & \frac{\tau_{nn}}{c_2^2\,\rho} \\
-\frac{\left(c^2+\tau_{nn}\right){\tau_{nt}}^2}{\tau_{nn}^2 c_2^2} & \frac{4\,{\tau_{nt}}^2}{\tau_{nn}^2\rho\,c_2^2} & 0 & \tau_{nn}^{-2} & -\frac{2\,\tau_{nt}}{\rho\,\tau_{nn}\left(c_2^2-\tau_{nn}\right)} & -\frac{2\,\tau_{nt}}{\rho\,\tau_{nn}\left(c_2^2-\tau_{nn}\right)} & \frac{2\,{\tau_{nt}}^2}{\rho\,\beta} & \frac{2\,{\tau_{nt}}^2}{\rho\,\beta} \\
-\frac{\left(c_2^2-\tau_{nn}\right)\tau_{nt}}{2\,\tau_{nn}\,c_2^2} & \frac{\tau_{nt}}{\rho\,\tau_{nn}\,c_2^2} & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho\left(c_2^2-\tau_{nn}\right)} & -\frac{1}{\rho\left(2\,\tau_{nn}+c^2\right)} & \frac{\left(c_2^2+\tau_{nn}\right)\tau_{nt}}{2\,\rho\,\beta} & \frac{\left(c_2^2+\tau_{nn}\right)\tau_{nt}}{2\,\rho\,\beta} \\
-\frac{{\tau_{nt}}^2\,c^2+\tau_{nn}^3+{\tau_{nt}}^2\,\tau_{nn}}{2\,\tau_{nn}^2 c_2^2} & -\frac{\tau_{nn}^2-2\,{\tau_{nt}}^2}{\tau_{nn}^2\rho\,c_2^2} & \frac{1}{2\,\tau_{nn}^2} & 0 & -\frac{\tau_{nt}}{\rho\,\tau_{nn}\left(c_2^2-\tau_{nn}\right)} & -\frac{\tau_{nt}}{\rho\,\tau_{nn}\left(c_2^2-\tau_{nn}\right)} & \frac{\tau_{nn}\,c^2+2\,\tau_{nn}^2+2\,{\tau_{nt}}^2}{2\,\rho\,\beta} & \frac{\tau_{nn}\,c^2+2\,\tau_{nn}^2+2\,{\tau_{nt}}^2}{2\,\rho\,\beta}
\end{array}\right], \tag{24}
$$

où on a utilisé

$$
c_1 = \sqrt{\tau_{nn}} \quad c_2 = \sqrt{3\tau_{nn} + c^2}, \quad \beta = \left(c^4 + 5\,\tau_{nn}\,c^2 + 6\,\tau_{nn}^2\right) \quad . \tag{25}
$$

La diagonalisation de la matrice du système de départ (2) est faite grâce à l'expression suivante:

$$
A \;=\; M^{-1}\left[B^{-1}\left\{L\,\Lambda\,L^{-1}\right\}B\right]M \quad . \tag{26}
$$

Les vecteurs propres à droite dans le repère $[n,t]$ en variables conservatives qui sont solutions de l'équation

$$
\left[\hat{A} - \lambda_i\overline{\overline{I}}\right]\vec{r}_i \;=\; 0 \quad , \tag{27}
$$

sont utiles pour analyser le comportement du système en présence des discontinuités. Ils sont donnés dans l'annexe B.

2.1 Solution du problème de Riemann

Avant de considérer la résolution numérique du système (2), on s'intéresse maintenant à la solution analytique du problème de Riemann associé. Le problème de Riemann est un problème instationnaire aux valeurs initiales discontinues:

$$\vec{Q}\,(t=0) \;=\; \begin{cases} \vec{Q}_L & x < x_0 \\ \\ \vec{Q}_R & x > x_0 \end{cases} \quad . \tag{28}$$

Les conditions de saut pour un système conservatif correspondent aux relations de Rankine-Hugoniot. Pour notre système non-conservatif, on considère la connexion des états à travers une discontinuité par un chemin linéaire (cf. [10, 11]) pour les variables turbulentes. Pour ce choix, la solution du problème de Riemann est exprimée par les relations suivants:

$$-\,\sigma\left[\hat{Q}\right] \,+\, \left[\hat{F}\right] \,=\, \overline{G}\left[\hat{Q}\right] \quad . \tag{29}$$

Les crochets représentent le saut d'une grandeur $[\Phi] = \Phi_L - \Phi_R$, σ est la vitesse normale de la discontinuité et $\overline{G}$ correspond à la matrice $\overline{\overline{G}}$ construite avec des valeurs moyennes (on note: $\overline{\Phi} = (\Phi_L + \Phi_R)\,/2$):

$$\overline{G} \;=\; \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2\overline{\widetilde{u}_n}\,\overline{\rho\tau_{nn}}}{\overline{\rho}} & \frac{2\overline{\rho\tau_{nn}}}{\overline{\rho}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2\overline{\widetilde{u}_t}\,\overline{\rho\tau_{nt}}}{\overline{\rho}} & 0 & \frac{2\overline{\rho\tau_{nt}}}{\overline{\rho}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \begin{matrix} -\frac{\overline{\widetilde{u}_t}\,\overline{\rho\tau_{nn}}}{\overline{\rho}} \\ -\frac{\overline{\widetilde{u}_n}\,\overline{\rho\tau_{nt}}}{\overline{\rho}} \end{matrix} & \frac{\overline{\rho\tau_{nt}}}{\overline{\rho}} & \frac{\overline{\rho\tau_{nn}}}{\overline{\rho}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \begin{matrix} -\frac{\overline{\widetilde{u}_n}\,\overline{\rho\tau_{nn}}}{\overline{\rho}} \\ -\frac{\overline{\widetilde{u}_t}\,\overline{\rho\tau_{nt}}}{\overline{\rho}} \end{matrix} & \frac{\overline{\rho\tau_{nn}}}{\overline{\rho}} & \frac{\overline{\rho\tau_{nt}}}{\overline{\rho}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \tag{30}$$

2.1.1 Les ondes linéairement dégénérées

Pour les ondes linéairement dégenerées (LD), on rappelle que la projection du gradient par rapport aux variables caractéristiques $\vec{w}$ sur les vecteurs propres à droite est nulle:

$$[\nabla_w \lambda_i]\,\vec{r}_i = 0 \quad . \tag{31}$$

Pour les ondes qui verifient (31), la vitesse caractéristique est constante à travers la discontinuité. Elle est donc égale à la vitesse de déplacement de la discontinuité:

$$\sigma = \lambda_i\left(\vec{Q}_L\right) = \lambda_i\left(\vec{Q}_R\right) \quad . \tag{32}$$

Les invariants Ψ obtenus par la solution des relations de saut s'écrivent:

- $\lambda_{1\ldots4} = \tilde{u}_n \quad : \quad \Psi = \{\tilde{u}_n,\, \rho\tau_{nt},\, \tilde{u}_t,\, p + \rho\tau_{nn}\}$
- $\lambda_5 = \tilde{u}_n + c_1 \quad : \quad \Psi = \left\{\tilde{u}_n,\, \tau_{nn},\, \rho,\, \tilde{u}_t - \frac{\tau_{nt}}{\sqrt{\tau_{nn}}},\, \tau_{nn}\tau_{tt} - \tau_{nt}^2,\, k - \frac{\tau_{nt}^2}{2\tau_{nn}},\, p\right\}$
- $\lambda_6 = \tilde{u}_n - c_1 \quad : \quad \Psi = \left\{\tilde{u}_n,\, \tau_{nn},\, \rho,\, \tilde{u}_t + \frac{\tau_{nt}}{\sqrt{\tau_{nn}}},\, \tau_{nn}\tau_{tt} - \tau_{nt}^2,\, k - \frac{\tau_{nt}^2}{2\tau_{nn}},\, p\right\}$. (33)

2.1.2 Les ondes vraiment non-linéaires

Les ondes vraiment non-linéaires (VNL) sont caractérisées par le fait que la vitesse caractéristique n'est pas constante à travers la courbe caractéristique:

$$\left[\nabla_w \lambda_i\right] \vec{r}_i \neq 0 \quad . \tag{34}$$

Les conditions de saut donnent (avec $z \equiv \rho_R/\rho_L$) entre autres relations:

- $\lambda_7 = \tilde{u}_n + \sqrt{3\tau_{nn} + c^2} : \quad \sigma = \dfrac{z\tilde{u}_{n_R} - \tilde{u}_{n_L}}{z-1}, \quad \dfrac{\tau_{nn_L}}{\tau_{nn_R}} = \dfrac{(z-2)\, z}{(2z-1)}$. (35)

Sans aller plus loin, on remarque que le saut maximal admissible par l'hypothèse du chemin linéaire est limité par le fait que la tension normale change de signe à travers un choc pour $z > 0.5$.

Pour des chocs plus faibles que cette limite ($z < 0.5$), les relations obtenues grâce au chemin linéaire donnent des valeurs réalisables. Néanmoins, ces relations ne sont pas exactes.

3 Résolution numérique

Le système de base mis sous forme intégrale s'écrit:

$$\int_{C_i} \partial_t \vec{Q} \mathrm{d}v + \oint_{\partial C_i} \vec{F}\vec{n} \mathrm{d}\sigma = \int_{C_i} \overline{\overline{G}} \nabla \vec{Q} \mathrm{d}v \quad . \tag{36}$$

L'intégration est effectuée sur une cellule de contrôle C_i dont les interfaces sont notées ∂C_i.

La méthode générale d'intégration utilisée dans cette étude est formellement équivalente à celle de la référence [11]. On exprime l'avancement en temps par un schéma explicite d'ordre un:

$$\int_{C_i} \partial_t \vec{Q} \mathrm{d}v \approx \left(\vec{Q}^{n+1} - \vec{Q}^{n}\right) \frac{V_{C_i}}{\Delta t} \quad , \tag{37}$$

tout autre terme étant pris à l'étape n. L'intégrale des flux conservatifs est exprimée par la somme des projections des fonctions de flux numériques Φ_{ij} sur les facettes surfaciques σ_{ij} du volume de contrôle:

$$\oint_{\partial C_i} \vec{F}\vec{n} \mathrm{d}\sigma \approx \sum_{\partial C_{ij}} \Phi_{ij}\vec{n}\sigma_{ij} \quad . \tag{38}$$

La définition de la fonction de flux utilisée ici est donnée ci-dessous.

Le terme source est figé sur la cellule C_i. Cela permet de le sortir de l'intégrale, ce qui donne:

$$\int_{C_i} \overline{\overline{G}} \nabla \vec{Q} \mathrm{d}v \approx \overline{\overline{G}}_i \int_{C_i} \nabla \vec{Q} \mathrm{d}v \quad . \tag{39}$$

La divergence des variables $\nabla\vec{Q}$ est calculée par une difference centrée sur la cellule. Dans le cadre d'un approche mixte volumes-finis éléments-finis, cela est équivalent à une formulation de Galerkin linéaire.

3.1 Définition de la fonction de flux

On a testé deux approches differentes pour la construction d'une fonction de flux numérique. La première est basée sur une décomposition de la différence de flux d'aprés Roe [13]. La deuxième méthode est similaire à un schéma de Godunov avec une décomposition des variables du système.

3.1.1 Décomposition par différences de flux

La formule générale pour la fonction de flux dans le cadre d'une méthode de décomposition par différences de flux s'écrit:

$$\Phi_{ij} = \frac{1}{2}\left[F\left(\vec{Q}_i\right) + F\left(\vec{Q}_j\right) - |A_{ij}|\left(\vec{Q}_j - \vec{Q}_i\right)\right] \quad , \tag{40}$$

où $\vec{Q}_i$ et $\vec{Q}_j$ désignent les états des deux cotés d'une interface partielle ∂C_{ij}. Le problème consiste à trouver une matrice A_{ij} dans notre système non-conservatif qui donne une bonne résolution du saut à travers une discontinuité entre les deux noeuds i et j. La méthode de Roe [13] utilise les conditions de saut exactes pour la définition de la matrice A_{ij}. En utilisant le chemin linéaire pour le système non-conservatif, on pose:

$$A_{ij}\left[\vec{Q}\right] = \left[\vec{F}\right] + \overline{G}\left[\vec{Q}\right] \quad . \tag{41}$$

De manière équivalente, on peut calculer la matrice A_{ij} définie par la relation (41) directement ou en passant par un vecteur paramétrique $\vec{z} \equiv \sqrt{\rho}\left[1, \tilde{u}_n, \tilde{u}_t, \widetilde{H}, \tau_{nn}, \tau_{tt}, \tau_{nt}, k\right]$ similaire à celui proposé par Roe. On remarque que la forme de la matrice obtenue ne permet pas de retrouver la matrice $\overline{\overline{A}}$ du système de base par un simple changement de variable $\vec{Q} \rightarrow \vec{Q}_{moy}$. Ceci est contraire au cas des équations conservatives telles que les équations d'Euler où on aboutit à:

$$A_{ij} = \frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{Q}}\left(\vec{Q} \rightarrow \vec{Q}_{ROE}\right) \quad . \tag{42}$$

Dans ce cas bien plus simple, il est possible d'effectuer la diagonalisation de la matrice de décentrement A_{ij} à l'aide des matrices de passage déjà déterminées pour la jacobienne du système. Dans notre cas présent, cela ne semble pas possible. Il se présente donc deux possibilités:

- chercher la diagonalisation de la matrice A_{ij} définie par (41), c'est-à-dire construire un vrai solveur de Roe pour le système non-conservatif
- utiliser une forme approximative de la matrice A_{ij} qui est plus facilement diagonalisable.

A ce jour, on n'a pas réussi à trouver une diagonalisation de la matrice de Roe A_{ij} sous une forme utilisable dans un code de calcul. On est donc amené à travailler avec une matrice de décentrement approximative. On utilise ici la matrice du système calculée par la moyenne arithmétique des états i et j:

$$A_{ij} = \overline{\overline{A}}\left(\overline{Q}\right) \quad . \tag{43}$$

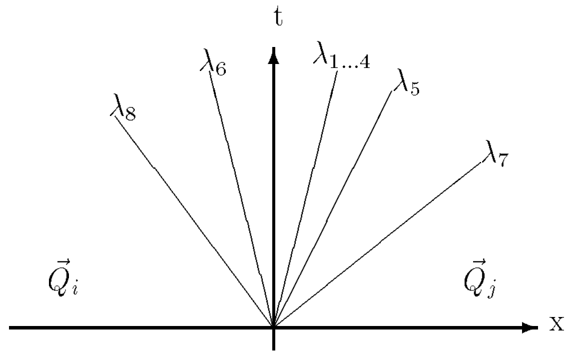
Les propriétés obtenues grâce à ce choix sont:

- la consistence pour un vecteur d'état constant:

$$A_{ij}\left(\vec{Q}_i, \vec{Q}_i\right) = \frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{Q}}\left(\vec{Q}_i\right) + \overline{\overline{G}}\left(\vec{Q}_i\right) \quad , \tag{44}$$

- la diagonalisabilité de la matrice A_{ij} (voir l'annexe A).

Figure 1: Exemple de position des ondes à l'interface d'une cellule



3.1.2 Décomposition par différences des variables

Ce schéma a été proposé par Gallouet [?]. Il est basé sur le principe de la décomposition de l'écart des variables conservatives, sur la base des vecteurs propres du système:

$$\vec{Q}_j - \vec{Q}_i = \sum_{k=1}^{8} \beta_k \, \vec{r}_k \left(\overline{Q}\right) \quad . \tag{45}$$

Les coefficients β_k de la relation (45) correspondent aux variables caractéristiques approchées. On note que le second membre est fonction des variables en moyenne arithmétique $\overline{Q}$. La solution du système (45) pour les inconnues β_k est donnée dans l'annexe C.

On cherche maintenant à déterminer l'état $\vec{Q}^*_{ij}$ à l'interface de la cellule. On considère la situation montrée sur la figure 1. Si on suppose que les états sont initialement constants par cellule comme dans la méthode de Godunov, les états voisins $\vec{Q}_i$ et $\vec{Q}_j$ sont séparés par des ondes simples (pour des temps suffisamment petits pour qu'on n'ait pas d'interaction). L'état à l'interface se trouve sur l'axe $x/t = 0$:

$$\vec{Q}^*_{ij} = \vec{Q}\,(x/t = 0) \quad . \tag{46}$$

En tenant compte des signes des vitesses caractéristiques, on peut reconstruire l'état intermédiaire par une des formules suivantes:

$$\vec{Q}^*_{ij} = \vec{Q}_j - \sum_{\lambda_k > 0} \beta_k \vec{r}_k \left(\overline{Q}\right) \tag{47}$$

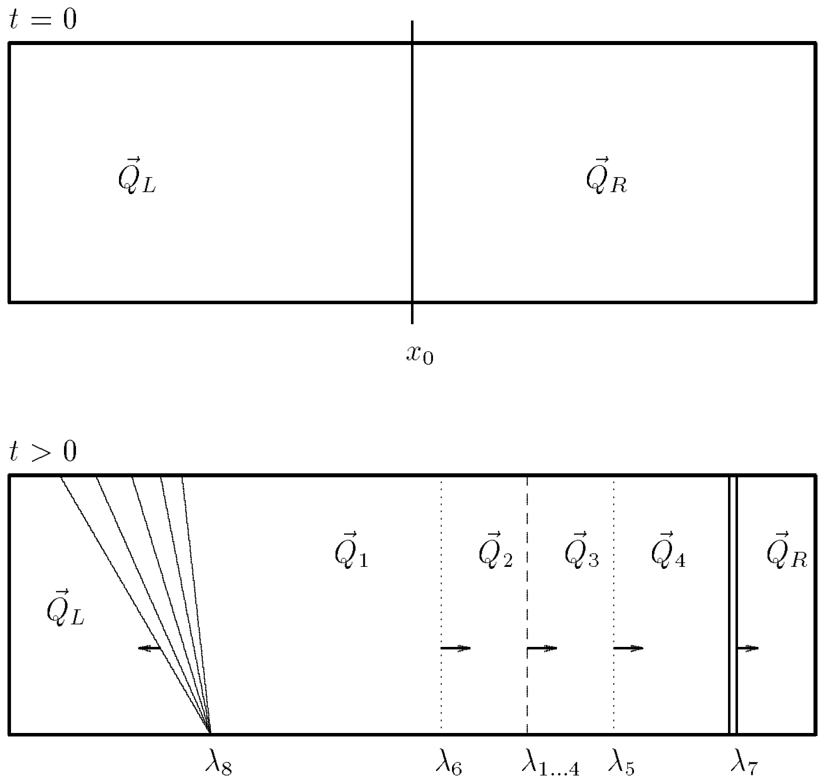
$$\vec{Q}^*_{ij} = \vec{Q}_i + \sum_{\lambda_k < 0} \beta_k \vec{r}_k \left(\overline{Q}\right) . \tag{48}$$

Les deux formules (47) et (48) donnent des résultats consistants sauf dans le cas où une ou plusieurs ondes ont des vitesses nulles. Dans ce cas on propose d'utiliser la moyenne arithmétique entre la valeur donnée par (47) et celle donnée par (48).

Finalement, on obtient le flux numérique simplement par:

$$\Phi_{ij} = \vec{F}\left(\vec{Q}^*_{ij}\right) \quad . \tag{49}$$

Figure 2: Schéma d'un tube à choc



4 Résultats

Afin de pouvoir juger la méthode numérique exposée ci-dessus on a choisi un cas test classique pour des solveurs des fluides compressibles. Il s'agit d'une variante du problème de tube à choc proposé par Sod (cf. [14]). L'avantage de ce test est qu'il représente tous les difficultés venant de la propagation d'ondes sans être géométriquement complexe. Ensuite, on change les conditions initiales afin d'obtenir un système d'ondes symétriques avec deux chocs (cas 2a) et un système avec deux faisceaux de détente (cas 2b).

4.1 Description du cas test

L'écoulement dans un tube à choc correspond à la configuration montrée sur la figure 2. Deux états thermodynamiques d'un gaz sont séparés par une membrane qui est enlevée à l'instant $t = 0$. A partir de l'interface initiale, les ondes porteuses d'information se déplacent dans les deux directions. Elles sont séparées par des zones où l'état de fluide est constant ($\vec{Q}_i$).

Ce problème, appliqué aux équations de la dynamique de gaz (équations d'Euler), est monodimensionnel. Pour tester un solveur conçu pour les équations d'Euler, un calcul avec les trois équations de conservation (masse, vitesse axiale, énergie) est suffisant pour voir apparaitre les trois ondes qui caractérisent le système mono- ou multidimensionnel. Notre système, issu d'un modèle de transport des tensions de Reynolds, a un caractère tensoriel. Une simplification *a priori* en mettant la vitesse tangentiellle $\widetilde{u}_t$ ainsi que la contrainte τ_{nt} et la tension τ_{tt} à zéro n'est pas envisageable car les ondes λ_5 et λ_6 ne peuvent pas être identifiées. Cela s'explique en regardant les invariants (33): ces deux ondes ne portent plus d'information si on simplifie de cette manière. Toutes les variables "monodimensionnelles" (ρ, $\widetilde{u}_n$, p, k, τ_{nn}) restent constantes à travers ces deux ondes dans ce cas. On est donc obligé d'avoir une condition initiale qui crée une variation de certaines de ces grandeurs pour pouvoir identifier les invariants.

Les calculs effectués peuvent être considérés comme "pseudo-monodimensionnels", puisque les bilans numériques ne prennent en compte qu'une direction spatiale tandis que tous les variables du système bidimensionnel peuvent être non nulles. La justification d'un tel procédé est donnée par l'hypothèse que les variations des variables dans la deuxième direction sont nulles. On peut donc obtenir une deuxième composante de la vitesse qui varie dans la direction axiale mais qui est constante dans la direction transversale. On résout alors pratiquement le système écrit dans le repère local sur un maillage monodimensionnel.

On remarque que Einfeldt et al. [15] ont effectué des calculs de cet type (avec les équations d'Euler) afin de mettre en évidence l'influence de la vitesse tangentielle sur le solveur de Roe. Pour cela, les auteurs ont étudiés une initialisation qui génère deux faisceaux de détente se propageant dans les deux directions. On peut également créer un système de deux chocs [11]. Ces deux configurations sont considérées comme des tests importants, car elles représentent des situations réalistes rencontrées dans le calcul d'écoulements derrière un obstacle où le champ de vitesse initial est perpendiculaire à la paroi. Dans le cas où on utilise des conditions de reflexion pour le traitement de cette frontière, une forte compression ou une détente importante peuvent être genérées.

4.1.1 Details physiques

On a choisi la longueur du domaine et le temps final de manière à permettre une séparation suffisante des ondes. De plus, on veut éviter l'interaction des ondes avec les parois aux extrémités du maillage afin de garder une solution qui est constituée d'ondes simples. Les valeurs du temps final et de

Tableau 1:

	x_0	t
cas 1	$14m$	$0.022963s$
cas 2a	$14m$	$0.022949s$
cas 2b	$15m$	$0.022949s$

la position initiale du diaphragme pour un domaine de longueur de $L = 30m$ sont données dans le tableau 1. Les états initiaux du gaz pour les trois cas considérés sont montrés dans le tableau 2. On définit un nombre de Mach turbulent qui traduit l'importance de l'intensité de la turbulence par rapport aux phénomènes compressibles,

$$\mathrm{Ma}_t^2 \equiv \frac{\rho k}{p} \quad . \tag{50}$$

Cette quantité vaut $\left[1, \frac{1}{10}\right]$ dans le cas 1 et $\left[\frac{1}{10}, \frac{1}{10}\right]$ dans les cas 2a et 2b, de part et d'autre du diaphragme.

4.1.2 Details numériques

Les valeurs à gauche et à droite d'une interface de cellule ∂C_{ij} ne sont pas interpolées. Il s'agit donc d'une précision spatiale d'ordre un.

On n'applique aucune correction pour des valeurs propres nulles dans la méthode de Roe (correction entropique).

La résolution spatiale est de $N = 500$ noeuds qui sont distribués de manière uniforme. Le nombre caractéristique utilisé dans le calcul du pas de temps du schéma explicite est de CFL = 0.5.

La notation concernant les différentes versions utilisées pour le calcul est la suivante:

- décomposition par différences de flux : Roe couplé
- décomposition par différences de variables : Gallouet
- décomposition par différences de flux découplé : Roe découplé.

La troisième variante correspond à la méthode exposée dans la référence [16]. Elle consiste à baser le calcul sur la résolution du système conservatif des équations de Navier-Stokes, couplé avec l'équation de l'énergie cinétique

Tableau 2: Etats initiaux pour les calculs du tube à choc

	$\rho\left[\frac{kg}{m^3}\right]$	$\widetilde{u}_n\left[\frac{m}{s}\right]$	$\widetilde{u}_t\left[\frac{m}{s}\right]$	$p\left[\frac{kg\,m}{s}^2\right]$	$\tau_{nn}\left[\frac{m^2}{s^2}\right]$	$\tau_{tt}\left[\frac{m^2}{s^2}\right]$	$\tau_{nt}\left[\frac{m^2}{s^2}\right]$	$k\left[\frac{m^2}{s^2}\right]$
cas 1								
L	1	0	0	10^5	$\frac{2}{3}\,10^5$	$\frac{2}{3}\,10^5$	$\frac{1}{4}\,10^5$	10^5
R	$\frac{1}{8}$	0	0	10^4	$\frac{16}{3}\,10^3$	$\frac{16}{3}\,10^3$	$2\cdot 10^3$	$8\cdot 10^3$
cas 2a								
L	1	100	0	10^5	$\frac{2}{3}\,10^4$	$\frac{2}{3}\,10^4$	$\frac{1}{4}\,10^4$	10^4
R	1	-100	0	10^5	$\frac{2}{3}\,10^4$	$\frac{2}{3}\,10^4$	$\frac{1}{4}\,10^4$	10^4
cas 2b								
L	1	-100	0	10^5	$\frac{2}{3}\,10^4$	$\frac{2}{3}\,10^4$	$\frac{1}{4}\,10^4$	10^4
R	1	100	0	10^5	$\frac{2}{3}\,10^4$	$\frac{2}{3}\,10^4$	$\frac{1}{4}\,10^4$	10^4

turbulente uniquement. Les tensions turbulentes sont traitées comme des scalaires passifs et ils sont convectés par le flux de la masse volumique. Les termes de production sont traités d'une façon centrée. On a inclus des résultats obtenus avec cette méthode trés approximative parce qu'elle constitue une technique de référence.

La méthode numérique a été codée et exécutée grâce au langage interprété YORICK [17] qui ne produit pas de code optimisé. Les temps d'exécution ne sont donc pas forcement représentatifs. Néanmoins, on remarque une reduction d'environ 20% du temps CPU en utilisant le schéma de Gallouet par rapport au schéma de Roe couplé, tandis que le découplage du système ne permet pas d'économie considérable.

4.2 Résultats du calcul

4.2.1 Cas de Sod modifié

Le système d'ondes généré par l'initialisation du cas 1 est celui montré sur la figure 2. De gauche à droite, on a une détente portée par l'onde λ_8 qui se déplace vers la gauche, l'onde λ_6, la discontinuité de contact $\lambda_{1\ldots4}$, l'onde λ_5 et le choc λ_7 qui se déplacent toutes vers la droite.

Tableau 3: Positions relatives des ondes λ_5, λ_6 et $\lambda_{1...4}$ pour le cas 1; les distances sont données en $[m]$, les tensions en $[m^2/s^2]$.

	$\overline{x}_6$	$\overline{x}_{1...4}$	$\overline{x}_5$	$\Delta\overline{x}_{6-4}$	$\Delta\overline{x}_{4-5}$	τ_{nn8-4}	τ_{nn4-7}	(52)	(51)
Roe couplé	19.6	22.2	26.6	2.6	4.4	14663	35630	2.78	4.33
Gallouet	19.5	22.2	26.8	2.7	4.6	14563	39647	2.77	4.57
Roe découplé	19.3	22.2	26.2	2.9	4.0	14302	28283	2.75	3.86

Dans les figures 4 à 9 on a tracé les résultats obtenus avec le schéma de Roe couplé ainsi que ceux obtenus avec le schéma de Roe découplé. La comparaison donne une idée du bénéfice lié au traitement plus complet entrepris dans cette étude. Ensuite, les figures 11 à 16 montrent les grandeurs correspondantes obtenues par le schéma de Gallouet. Pour faciliter l'analyse, on a encore inclus les résultats du schéma de Roe couplé.

Tout d'abord, on constate la présence des ondes λ_5 et λ_6 dans les trois résultats. Sur la figure 3 (10 respectivement) on observe une région où la grandeur $\tilde{u}_t - \frac{\tau_{nt}}{\sqrt{\tau_{nn}}}$ varie et où $\tilde{u}_t + \frac{\tau_{nt}}{\sqrt{\tau_{nn}}}$ reste constant. Cela correspond à $19.6m < x < 20.2m$ pour le résultat du calcul de Roe couplé. Le contraire est vrai pour l'intervalle $25.2m < x < 27.6m$. En même temps, la vitesse tangentielle $\tilde{u}_t$ varie dans les deux intervalles. On met donc en évidence les ondes λ_5 et λ_6. L'analyse de l'ensemble des courbes montre que tous les invariants associés à ces deux ondes (expressions données dans (33)) sont respectés par les calculs.

Le comportement des résultats numériques à travers la discontinuité de contact, qui est associée à l'onde multiple $\lambda_{1...4}$, est également correct qualitativement. On identifie cette onde par le "saut" de la masse volumique entre $x \approx 21.5m$ et $x \approx 23m$. Simultanément, la somme des tensions normales $p + \tau_{nn}$ est constante, ainsi que les deux composantes de la vitesse.

On peut estimer approximativement la position relative des ondes, puisque celles-ci sont séparées par des états constants du fluide. L'intégration temporelle de la différence des vitesses caractéristiques peut être effectuée:

$$\Delta\overline{x}_{4-5} = \int_0^t (\lambda_5 - \lambda_4)\,\mathrm{d}t = \sqrt{\tau_{nn4-7}}\,\Delta t \tag{51}$$

$$\Delta\overline{x}_{6-4} = \int_0^t (\lambda_5 - \lambda_4)\,\mathrm{d}t = \sqrt{\tau_{nn8-4}}\,\Delta t\,. \tag{52}$$

τ_{nn4-7} correspond à la valeur numérique de la tension normale turbulente

Tableau 4: L'intensité du choc λ_7 exprimée par le rapport des masses volumiques z

	Roe couplé	Gallouet	Roe découplé
z	0.4685	0.4749	0.4564
$\%_{\text{Roe couplé}}$	100.0	101.4	97.4

dans la zone entre les ondes λ_4 et λ_7, l'analogue est vrai pour τ_{nn8-4}. On peut comparer les valeurs obtenues à l'aide des formules (51) et (52) avec les positions obtenues graphiquement. Pour déterminer la position d'une onde graphiquement (notée $\overline{x}_i$), on utilise le point au milieu d'une zone caractérisée par le comportement des invariants. Les valeurs dans le tableau 3 montrent que les vitesses relatives de la propagation des ondes λ_5, λ_6 et $\lambda_{1...4}$ sont représentées correctement par les trois schémas numériques.

A l'extrémité droite ($x \approx 14.5m$) du faisceau de détente qui correspond à l'onde λ_8, seul le schéma découplé produit un creux non-physique de la pression et de la masse volumique ainsi qu'un pic de la vitesse normale. De même, on remarque une oscillation de la plupart des variables de ce résultat avant le choc λ_7 ($x \approx 28m$). La présence de ces oscillations permet donc de distinguer l'approche découplée des approches basées sur le système hyperbolique complet.

La deuxième différence entre les trois résultats numériques concerne le niveau de certaines variables telles que la pression, la tension normale turbulente, l'énergie cinétique turbulente et le déterminant δ_2 dans la région située entre les ondes λ_7 et $\lambda_{1...4}$ ($22m < x < 28m$). Les niveaux dans cette zone sont en théorie déterminés par le passage du choc. L'intensité de la compression, mesurée par le rapport des masses volumiques z, diffère de $\pm 3\%$ (voir tableau 4; les valeurs relatives sont calculées sur la base de la valeur de la méthode de Roe couplé). La variation des autres variables est liée à ce paramètre. Malheureusement, on n'est pas capable de déduire des conditions de saut exactes. Même si, pour des valeurs de z inférieures à 0.5, les relations approchées (35) ne donnent pas des résultats non-physiques, elles ne sont pas pour autant exactes.

4.2.2 Cas symétriques

Dans les deux cas 2a et 2b, l'onde $\lambda_{1...4}$ reste stationnaire au point initial. Les ondes λ_5 à λ_8 se propagent symétriquement dans des directions opposées.

Dans le cas 2a, les ondes VNL représentent des chocs, dans le cas 2b elles représentent des détentes.

L'analyse des résultats (figures 17 à 56) se fait de manière analogue pour les deux cas 2a et 2b, puisque les conclusions sont qualitativement semblables.

On remarque une perte de monotonie qui concerne les deux noeuds voisins de la position initiale de la discontinuité obtenue par les trois versions du solveur. Cet erreur est visible sur la masse volumique, la pression ainsi que l'ensemble des tensions turbulentes. Ce phénomène a déjà été noté par Hérard [11] dans le cadre d'un modèle k-ϵ avec des conditions initiales correspondantes. On note également que cet erreur n'est pas liée au niveau de l'intensité de la turbulence, puisqu'il apparait de la même façon quand on diminue les nombres de Mach turbulent initiaux des deux cotés.

Une forte oscillation des variables $\widetilde{u}_t$, τ_{tt}, τ_{nt} et k est obtenue par la méthode de Roe découplée dans l'intervalle $12m < x < 17m$ ($14m < x < 16m$ pour le cas 2b). Cette zone correspond à l'espace qui est confiné par la position des ondes λ_5 et λ_6. Cela est illustré par le tracé simultané des invariants $\widetilde{u}_t \pm \frac{\tau_{nt}}{\sqrt{\tau_{nn}}}$ sur les figures 26 et 36 (figures 46 et 56 pour le cas 2b), qui met en évidence des fortes oscillations de ces quantités sans doute dues au passage à travers ces ondes. Les oscillations sont ensuite amorties de manière à ce que l'invariance à travers l'onde complémentaire λ_6 ou λ_5 respectivement soit respectée.

Dans le cas 2a, on constate une différence de niveau qui est plus marquée pour les variables τ_{nn}, τ_{nt} et k dans la zone de $5m < x < 23m$ qui correspond à la région entre les deux chocs. La méthode de Roe découplée prédit des niveaux moins importants. Les deux méthodes basées sur le système hyperbolique complet donnent des résultats presque identiques. L'écart entre ces deux derniers schémas n'est visible qu'au niveau du creux à x_0 qui est légèrement moins marqué dans le résultat obtenu avec le schéma de Gallouet (voir figure 32).

5 Conclusions

On a analysé la partie hyperbolique du système des équations issu d'un modèle de turbulence au second ordre. La forme non-conservative qui est introduite grâce aux termes de production rend inaccessible une solution analytique à travers les ondes VNL. L'hypothèse d'un chemin linéaire pour connecter les états inconnus [11] permet de déduire des conditions de saut approchées qui ne sont valables que pour des chocs assez faibles.

Deux schémas numériques ont été testés qui sont basés sur une décomposition linéarisée par différence de flux (type Roe) ou par différence de variables (type Godunov). Le calcul d'une configuration monodimensionnelle donne des solutions sans oscillations sauf pour une anomalie en voisinage de la discontinuité initiale dans le cas 2.

Un schéma basé sur le pseudo-système de convection (sans influence de la production sur la fonction de flux) comme il est actuellement implémenté dans le code NATURng-RSM a été également testé en comparaison. Les calculs ont révélé le défaut de cette méthode qui consiste à admettre des oscillations trés marquées sur certaines variables, notamment en présence d'une double détente ou d'un double choc. Dans la mesure où on cherche à obtenir des solutions monotones, on conseille l'utilisation d'un schéma basé sur le système hyperbolique complet. Le choix entre la méthode de Roe et celle proposée par Gallouet peut être décidé par le fait que cette dernière offre une économie du temps de calcul. Elle nécessite cependant une refonte complete des codes mis en œuvre jusqu'à présent.

Références

[1] J. L. Lumley. Computational modelling of turbulent flows. *Advances in Applied Mechanics*, 18:123–176, 1978.

[2] B. E. Launder. Turbulence modelling for the nineties: Second moment closure ... and beyond? In *Twelfth International Conference on Numerical Fluid Dynamics*, 1990.

[3] C. G. Speziale. Analytical methods for the development of Reynolds stress closures in turbulence. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 23:107–157, 1991.

[4] M.A. Leschziner. Resolving complex strain fields with turbulence-transport closure models. Paris, 1993. Journés thématiques écoulements turbulents, EDF.

[5] S. Sarkar and B. Lakshmanan. Application of a Reynolds stress turbulence model to the compressible shear layer. *AIAA Journal*, 29:743–749, 1991.

[6] F. Cruaud. *Etude numérique de couches de mélange et jets supersoniques chauffés à l'aide d'une fermeture aux tensions de Reynolds*. PhD thesis, Université Paris VI, 1993.

[7] F.S. Lien and M.A. Leschziner. A pressure–velocity solution strategy for compressible flow and its application to shock /boundary–layer interaction using second–moment turbulence closure. *J. Fluids Eng.*, 115:717–725, 1993.

[8] L. Davidson. Reynolds stress transport modelling of shock induced separated flow. *Computers&fluids*, 24(3):253–268, 1995.

[9] J. H. Morrison. A compressible Navier–Stokes solver with two–equation and Reynolds stress turbulence closure models. Technical Report 4440, NASA CR, 1992.

[10] J.M. Hérard, A. Forestier, and X. Louis. A non strictly hyperbolic system to describe compressible turbulence. Technical Report HE-41/94.11 A, EDF Chatou, 1994.

[11] J.M. Hérard. Solveur de Riemann approché pour un système hyperbolique non conservatif issu de la turbulence compressible. Technical Report HE-41/95/009/A, EDF Chatou, 1995.

[12] U. Schumann. Realizability of Reynolds-stress turbulence models. *Phys. Fluids*, 20:721–724, 1977.

[13] P. L. Roe. Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes. *Journal of Computational Physics*, 43, 1981.

[14] C.G. Hirsch. *Numerical computation of internal and external flows.* John Wiley and sons, 1990.

[15] B. Einfeldt, C.D. Munz, P.L. Roe, and B. Sjögreen. On Godunov-type methods near low densities. *J. Comput. Physics*, 92:273–295, 1991.

[16] M. Uhlmann. Modélisation, discrétisation et validation d'une fermeture du second ordre — configuration de base. Technical Report rapport interne, Laboratoire de Mécanique de Fluides et d'Acoustique, Ecole Centrale de Lyon, France, Novembre 1995.

[17] D.H. Munro. *Yorick: an interpreted language.* Regents of the University of California, 1994.

[18] J.M. Hérard. Suitable algorithms to preserve the realisability of Reynolds stress closures. Technical Report HE-41/95/035/A, EDF Chatou, 1995.

Figures

Cas 1: comparaison Roe couplé – Roe découplé

Figure 3: Variation de la vitesse tangentielle, schéma de Roe couplé/ schéma de Roe découplé, cas 1

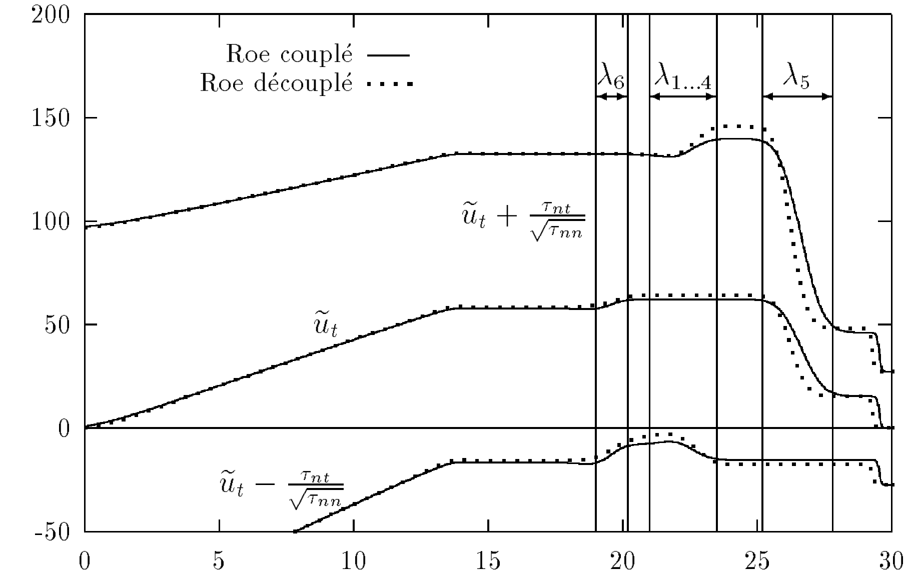


Figure 4: Variation des tensions normales axiales, schéma de Roe couplé/ schéma de Roe découplé, cas 1

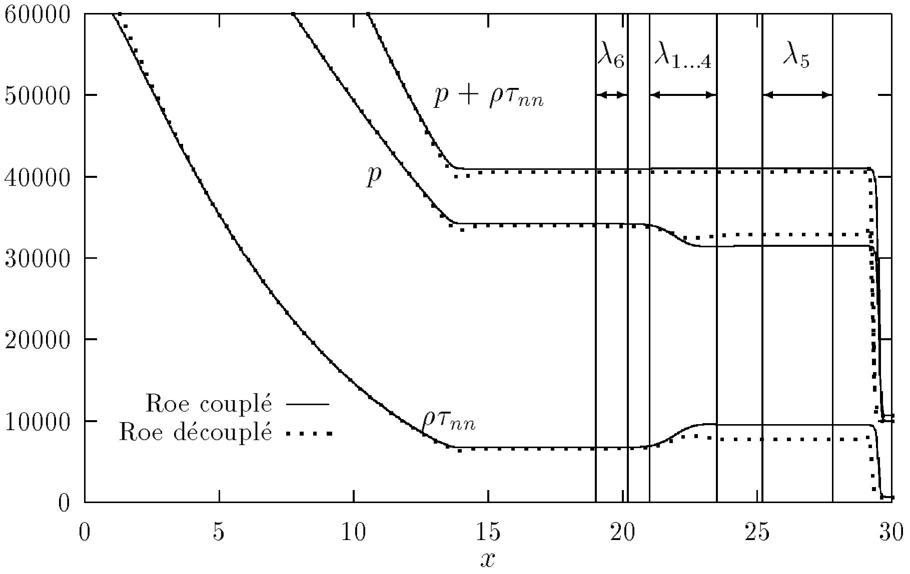


Figure 5: Variation de la vitesse axiale, schéma de Roe couplé/ schéma de Roe découplé, cas 1

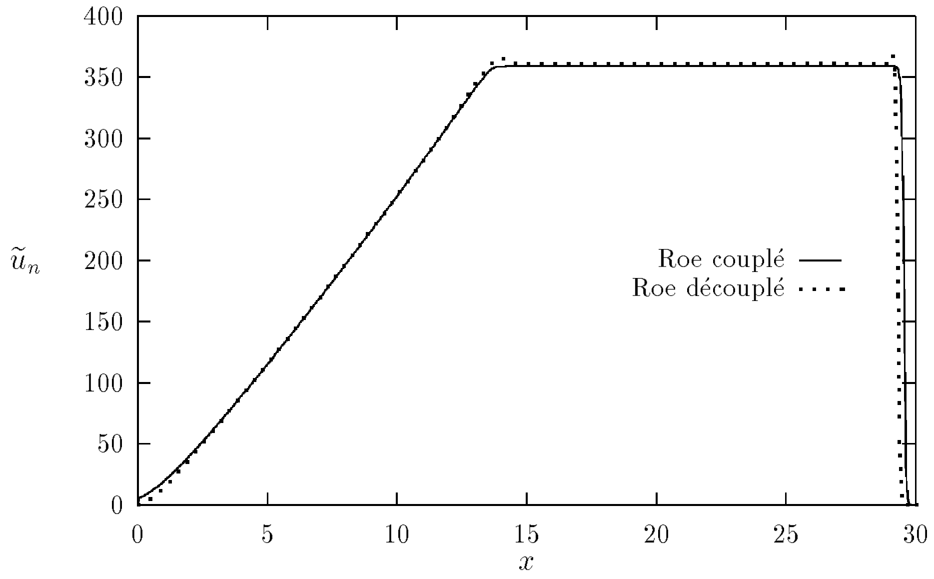


Figure 6: Variation de la masse volumique, schéma de Roe couplé/ schéma de Roe découplé, cas 1

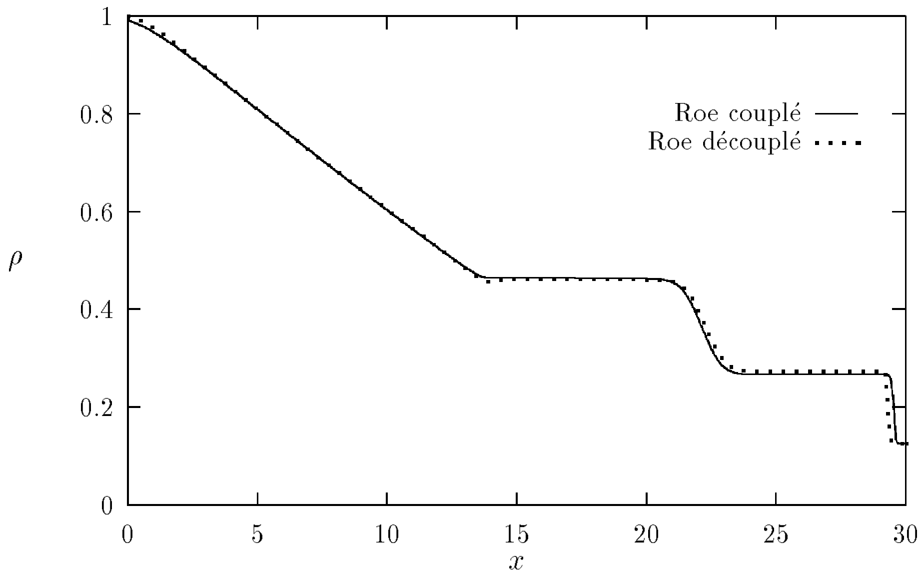


Figure 7: Variation de l'invariant lié à l'énergie cinétique turbulente, schéma de Roe couplé/ schéma de Roe découplé, cas 1

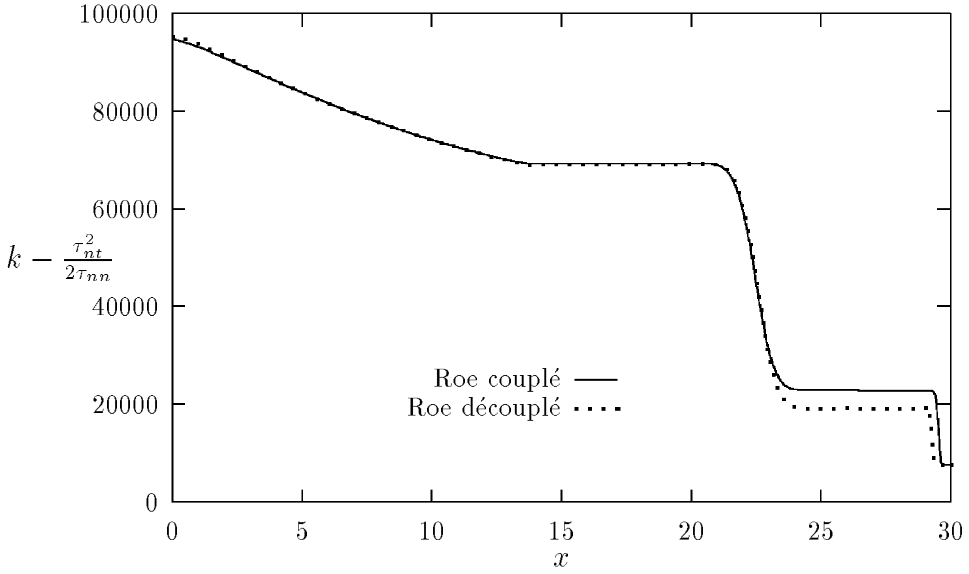


Figure 8: Variation de la quantité de mouvement axiale, schéma de Roe couplé/ schéma de Roe découplé, cas 1

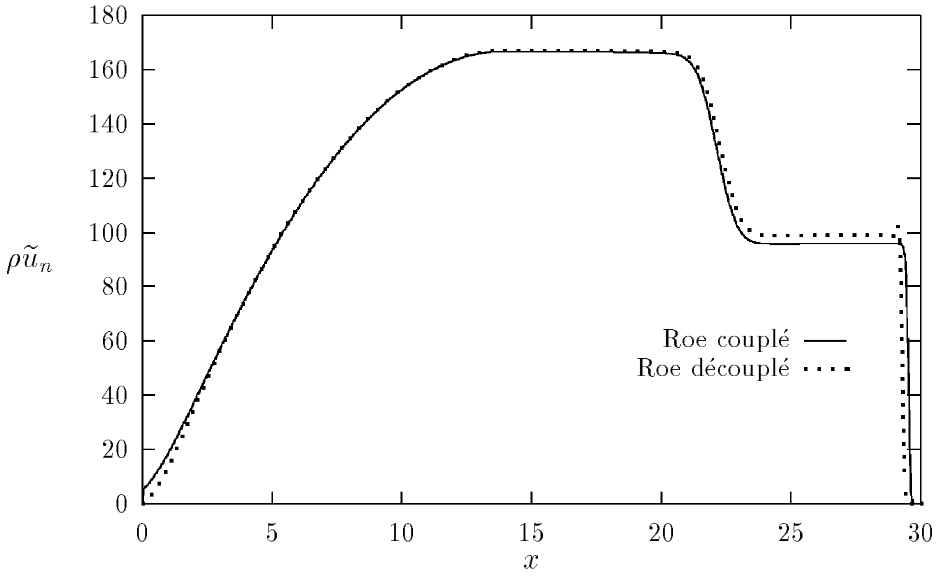
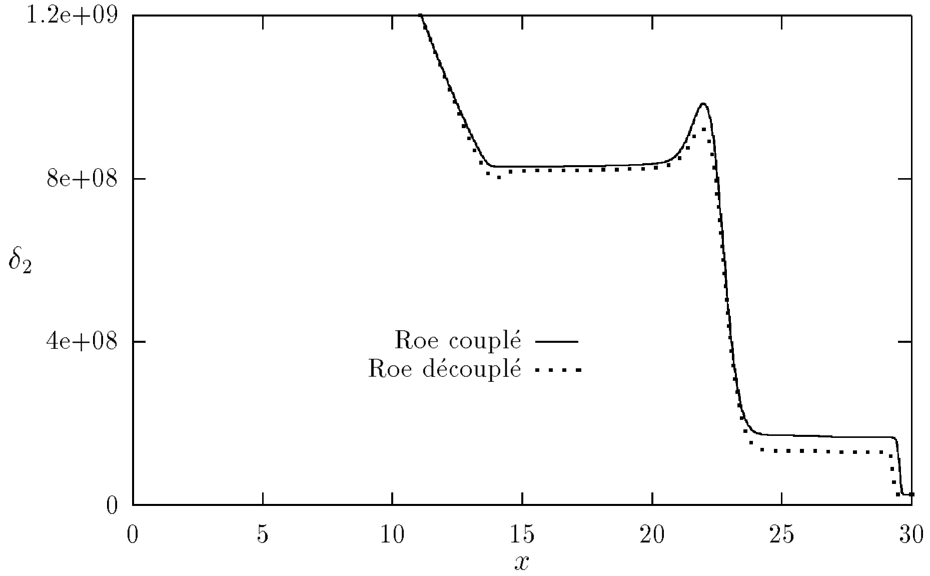


Figure 9: Variation du déterminant δ_2, schéma de Roe couplé/ schéma de Roe découplé, cas 1



Cas 1: comparaison Roe couplé – Gallouet

Figure 10: Variation de la vitesse tangentielle, schéma de Roe couplé/ schéma de Gallouet, cas 1

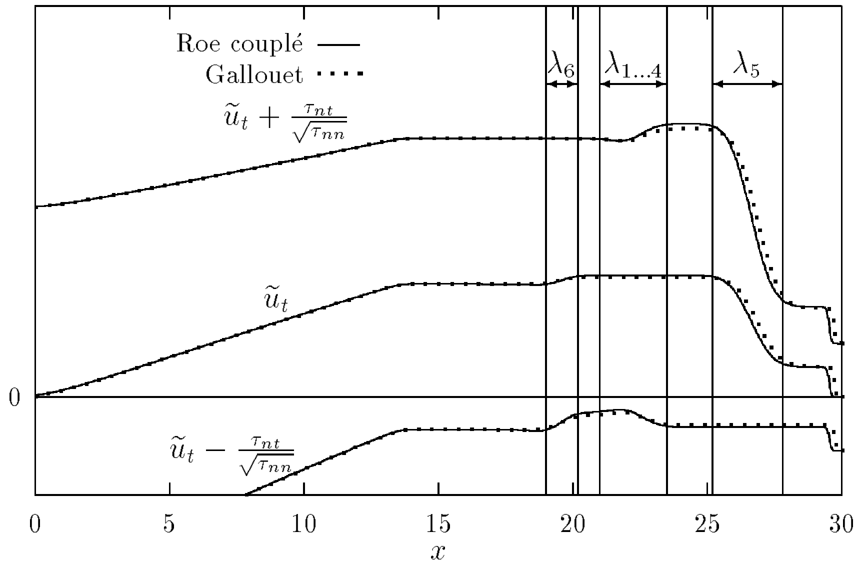


Figure 11: Variation des tensions normales axiales, schéma de Roe couplé/ schéma de Gallouet, cas 1

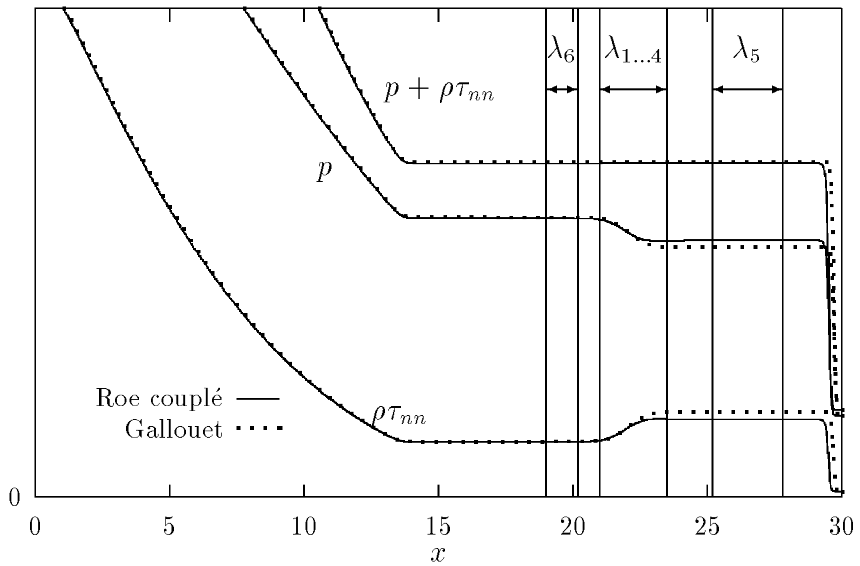


Figure 12: Variation de la vitesse axiale, schéma de Roe couplé/ schéma de Gallouet, cas 1

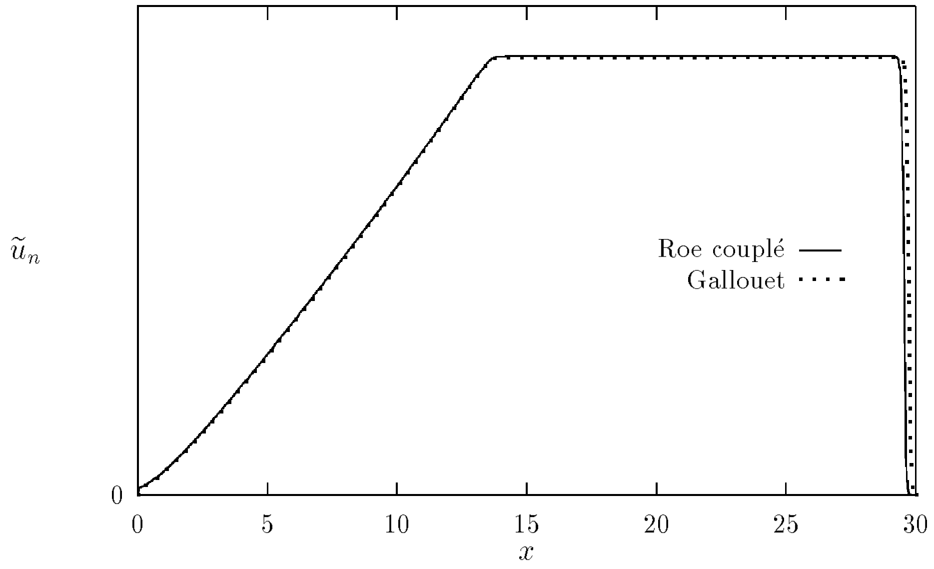


Figure 13: Variation de la masse volumique, schéma de Roe couplé/ schéma de Gallouet, cas 1

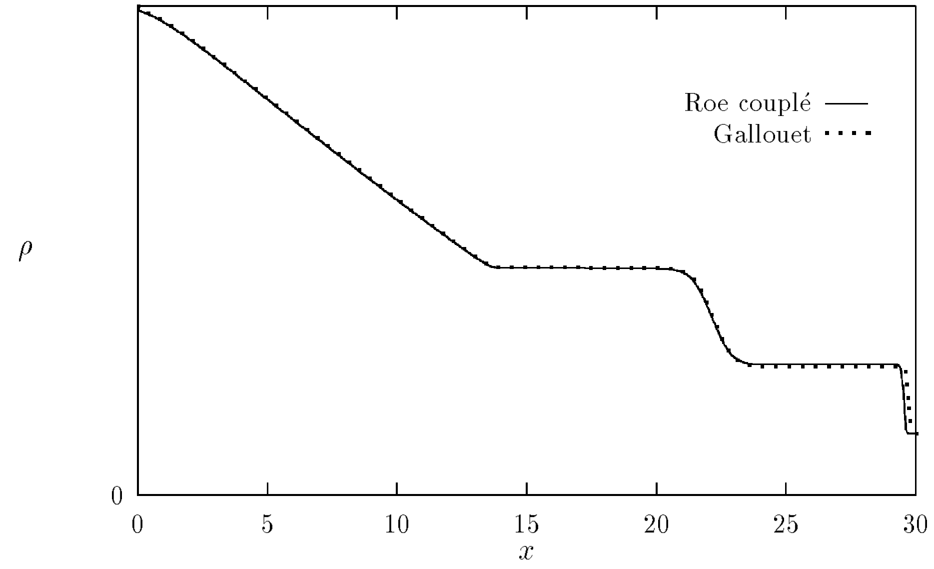


Figure 14: Variation de l'invariant lié à l'énergie cinétique turbulente, schéma de Roe couplé/ schéma de Gallouet, cas 1

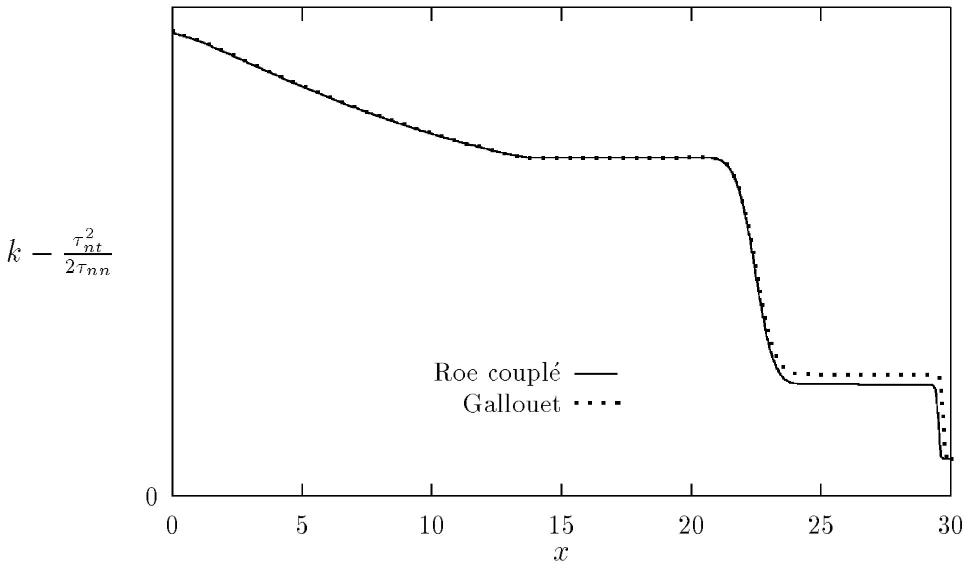


Figure 15: Variation de la quantité de mouvement axiale, schéma de Roe couplé/ schéma de Gallouet, cas 1

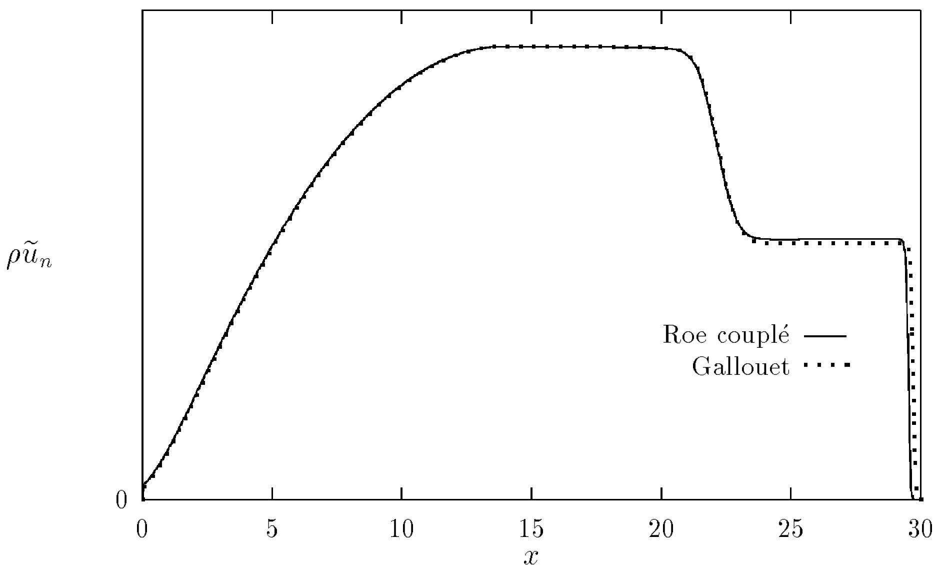
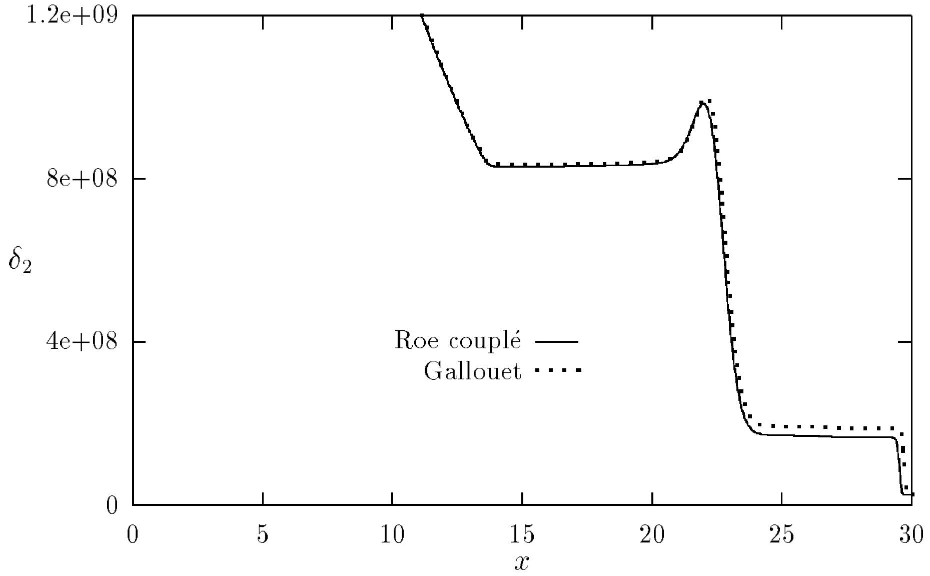


Figure 16: Variation du déterminant δ_2, schéma de Roe couplé/ schéma de Gallouet, cas 1



Cas 2a: comparaison Roe couplé – Roe découplé

Figure 17: Variation de la masse volumique, schéma de Roe couplé/ schéma de Roe découplé, cas 2a

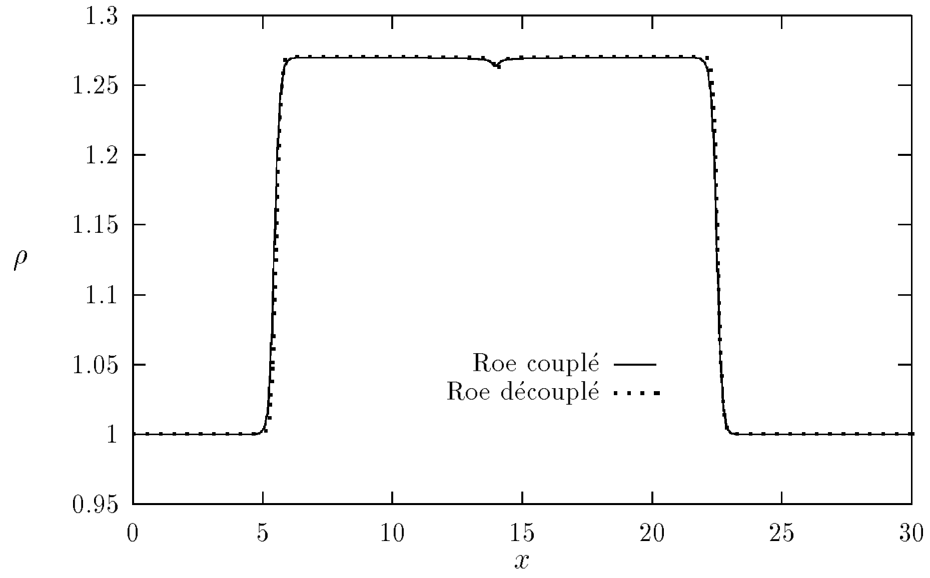


Figure 18: Variation de la vitesse axiale, schéma de Roe couplé/ schéma de Roe découplé, cas 2a

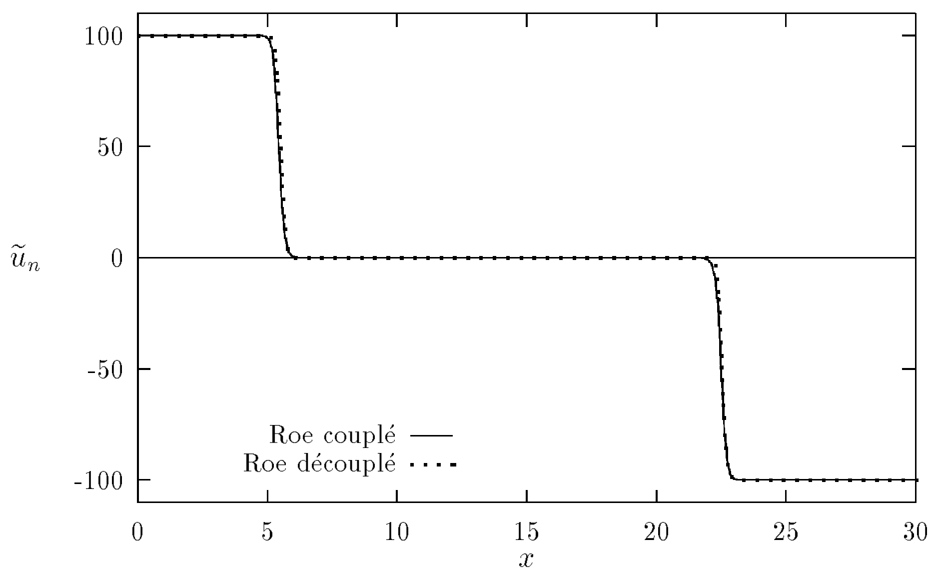


Figure 19: Variation de la vitesse tangentielle, schéma de Roe couplé/ schéma de Roe découplé, cas 2a

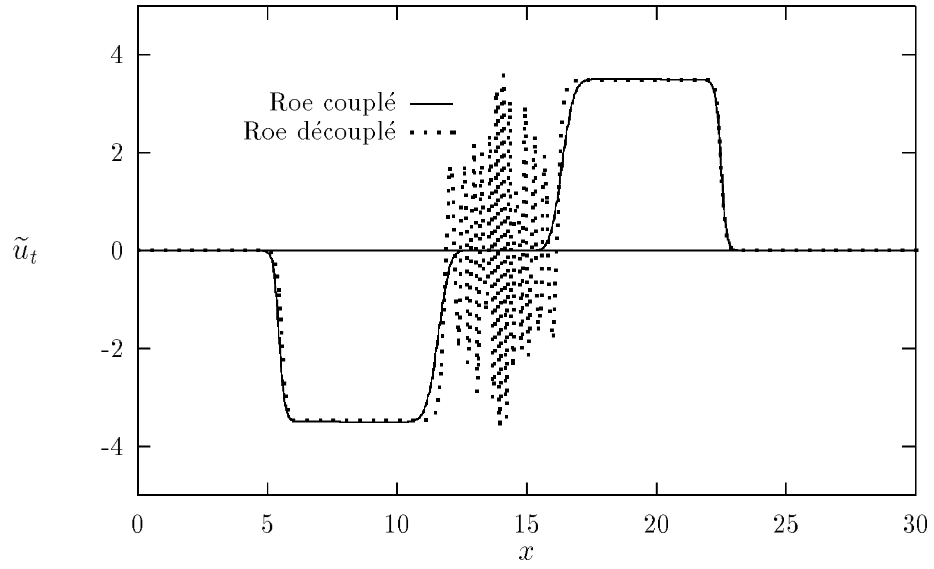


Figure 20: Variation de la pression et de la somme des tensions normales, schéma de Roe couplé/ schéma de Roe découplé, cas 2a

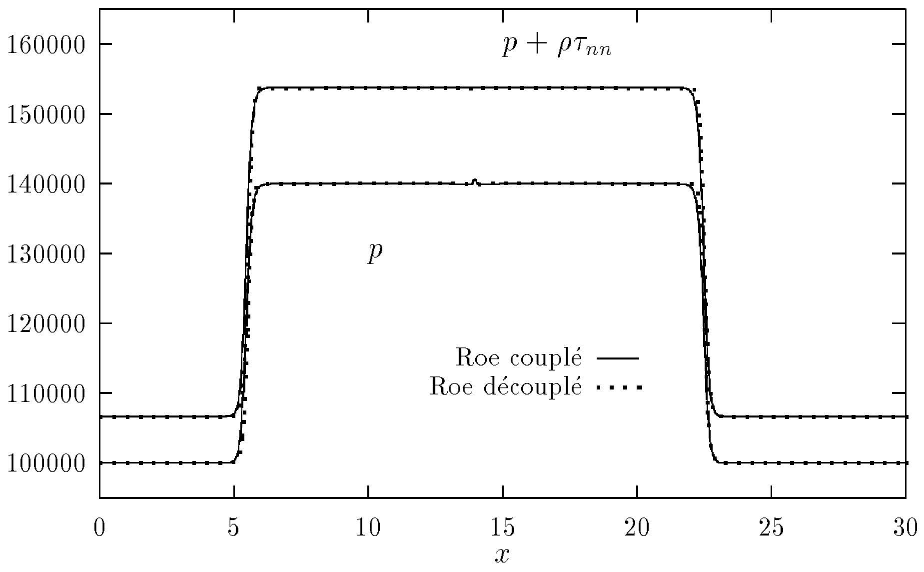


Figure 21: Variation de l'énergie cinétique turbulente, schéma de Roe couplé/ schéma de Roe découplé, cas 2a

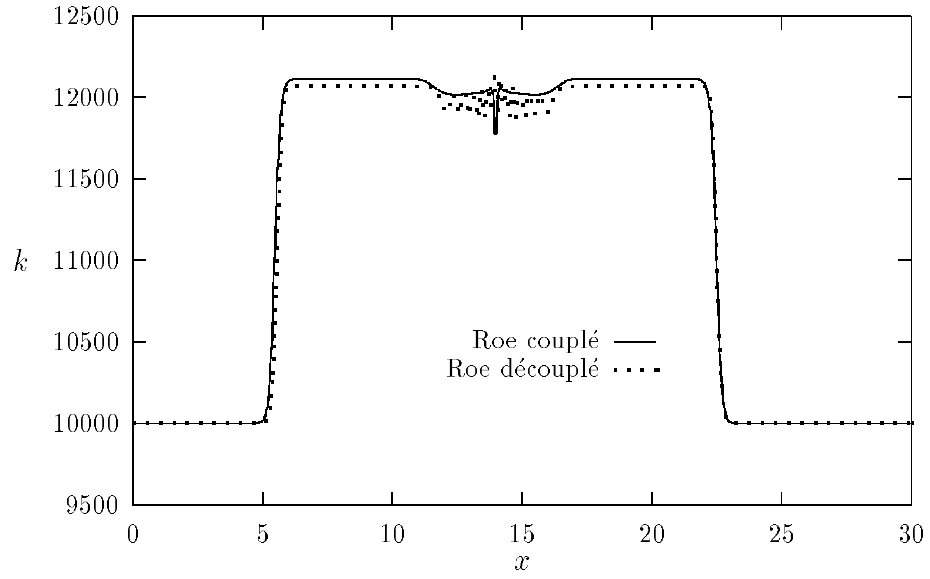


Figure 22: Variation de la tension normale turbulente, schéma de Roe couplé/ schéma de Roe découplé, cas 2a

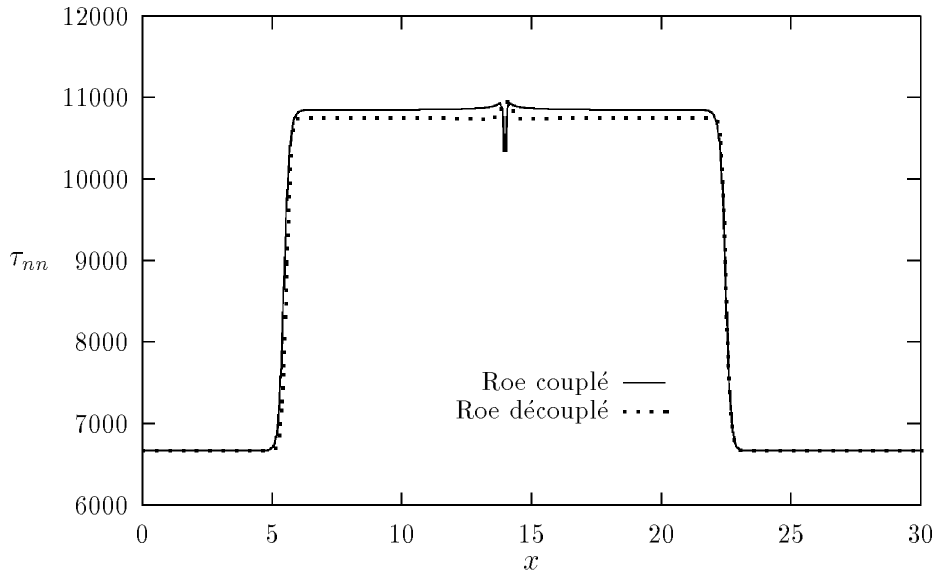


Figure 23: Variation de la deuxième tension normale, schéma de Roe couplé/ schéma de Roe découplé, cas 2a

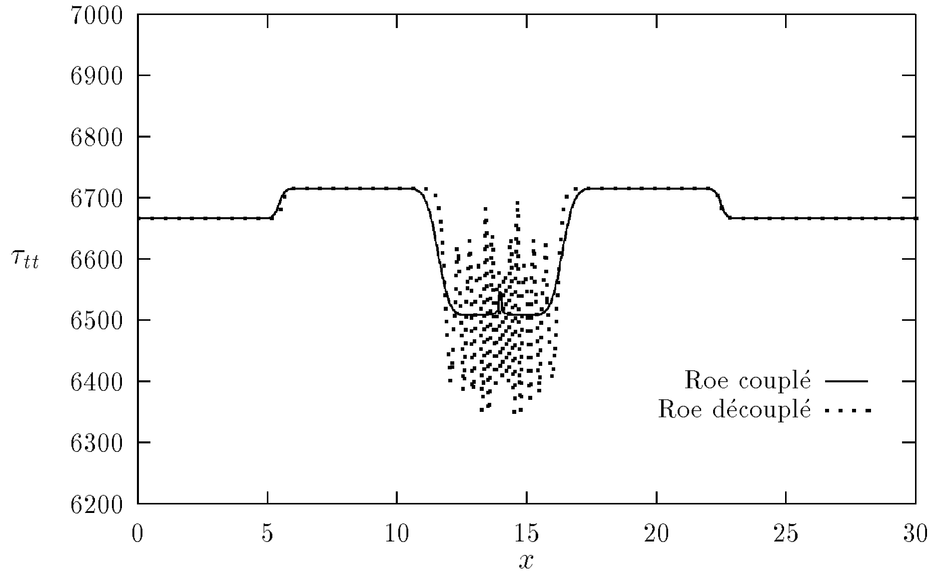


Figure 24: Variation de la tension tangentielle, schéma de Roe couplé/ schéma de Roe découplé, cas 2a

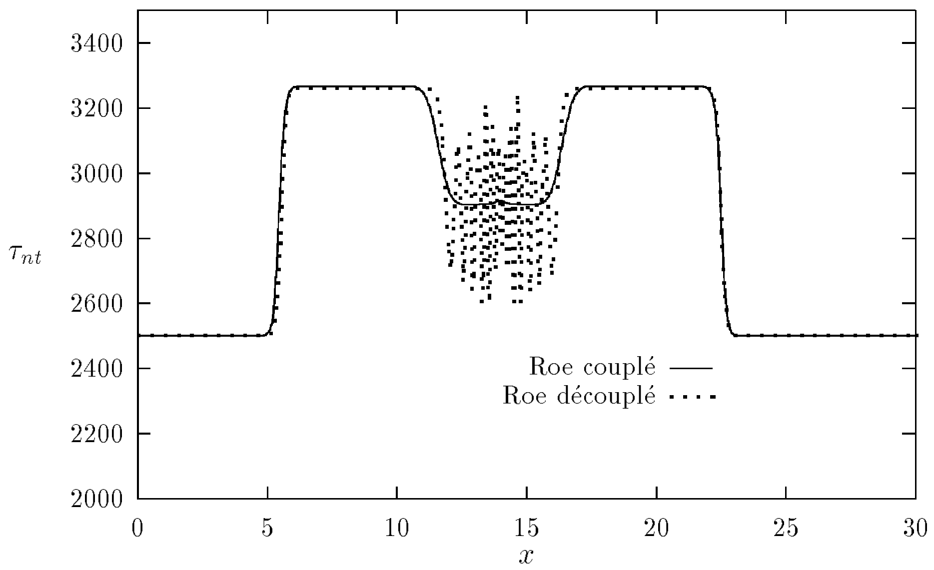


Figure 25: Variation du déterminant des tensions, schéma de Roe couplé/ schéma de Roe découplé, cas 2a

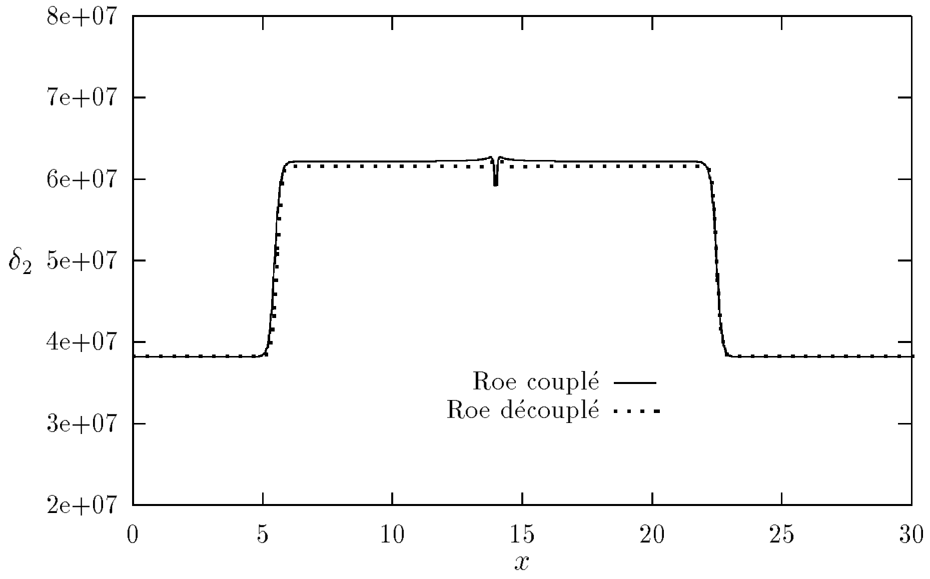
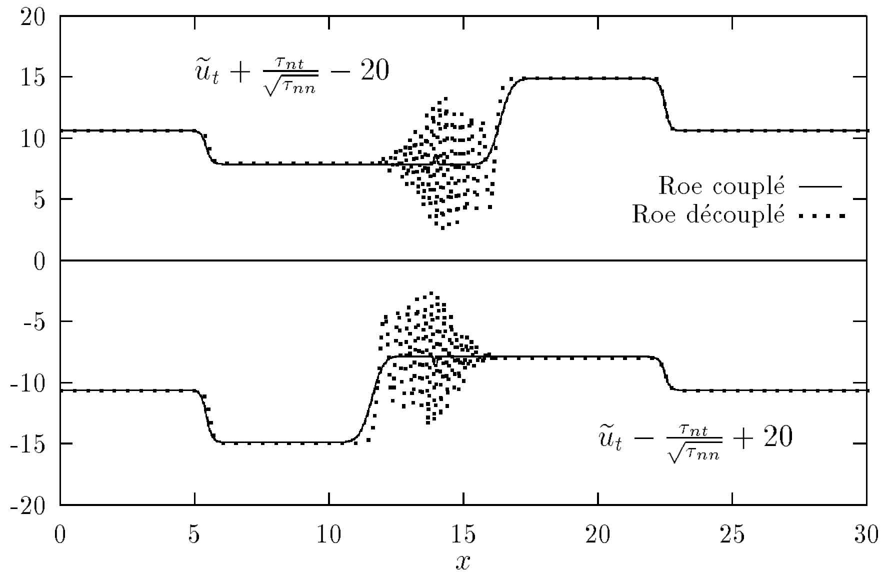


Figure 26: Variation des invariants associés à la vitesse tangentielle, schéma de Roe couplé/ schéma de Roe découplé, cas 2a



Cas 2a: comparaison Roe couplé – Gallouet

Figure 27: Variation de la masse volumique, schéma de Roe couplé/ schéma de Gallouet, cas 2a

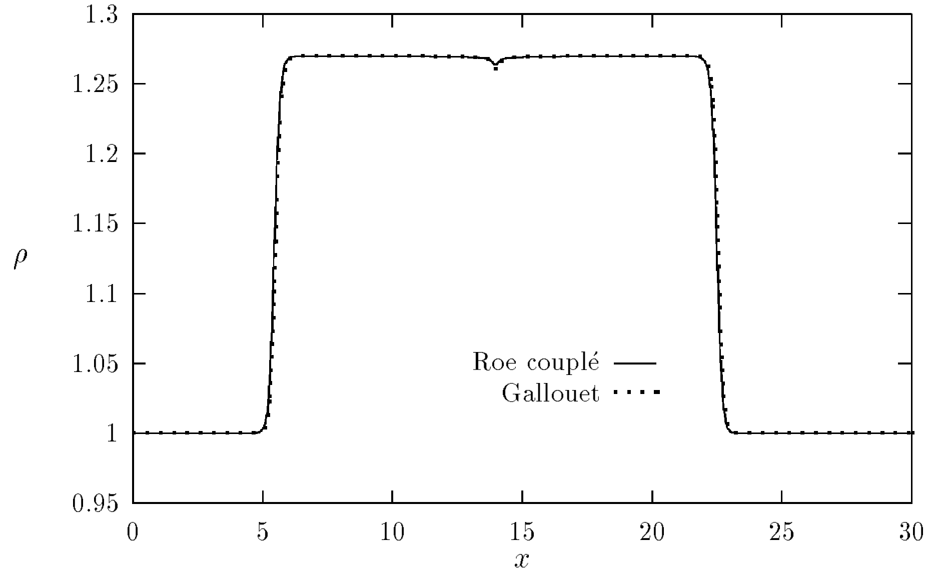


Figure 28: Variation de la vitesse axiale, schéma de Roe couplé/ schéma de Gallouet, cas 2a

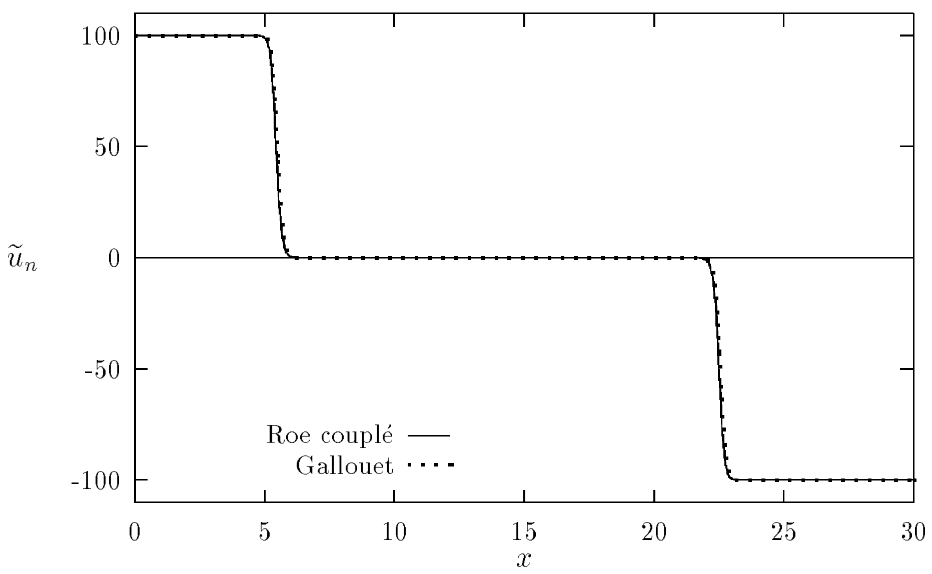


Figure 29: Variation de la vitesse tangentielle, schéma de Roe couplé/ schéma de Gallouet, cas 2a

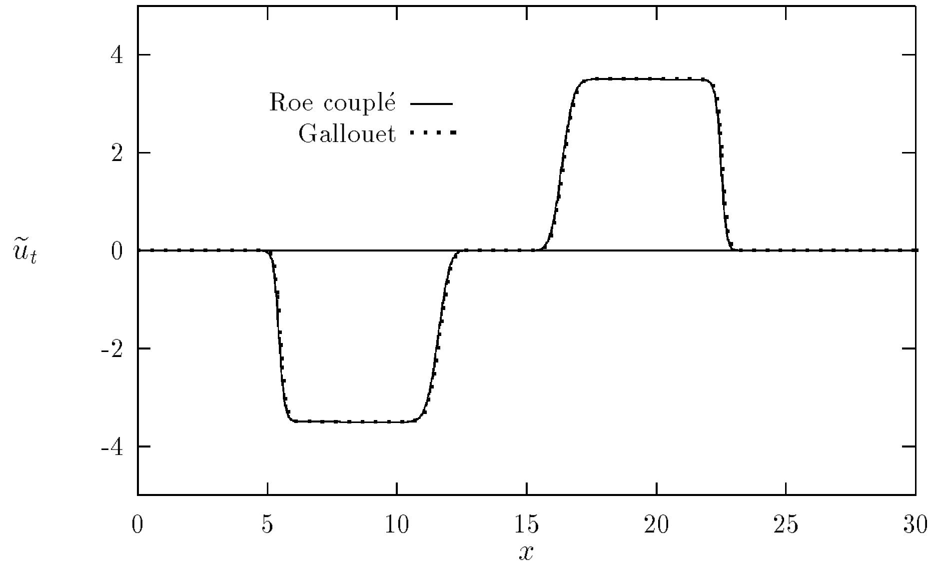


Figure 30: Variation de la pression et de la somme des tensions normales, schéma de Roe couplé/ schéma de Gallouet, cas 2a

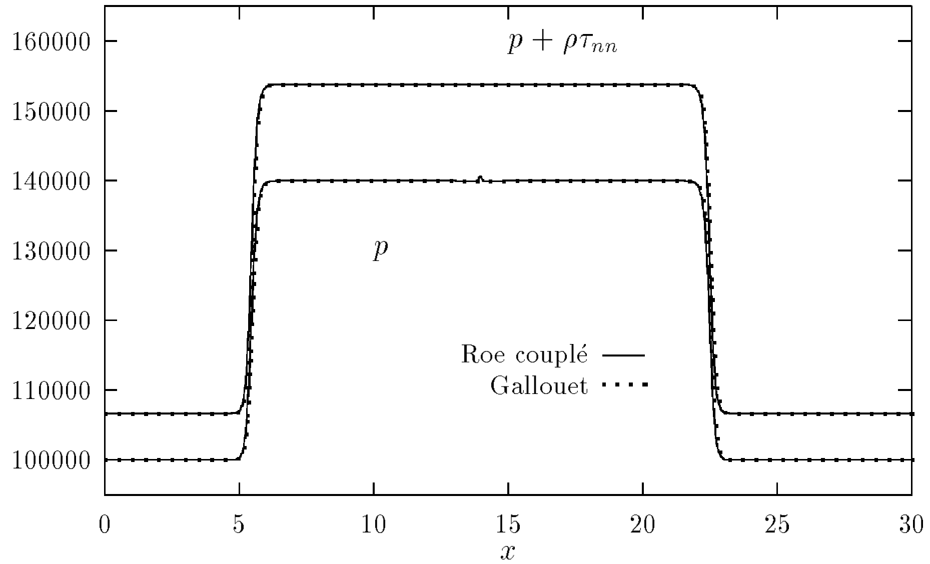


Figure 31: Variation de l'énergie cinétique turbulente, schéma de Roe couplé/ schéma de Gallouet, cas 2a

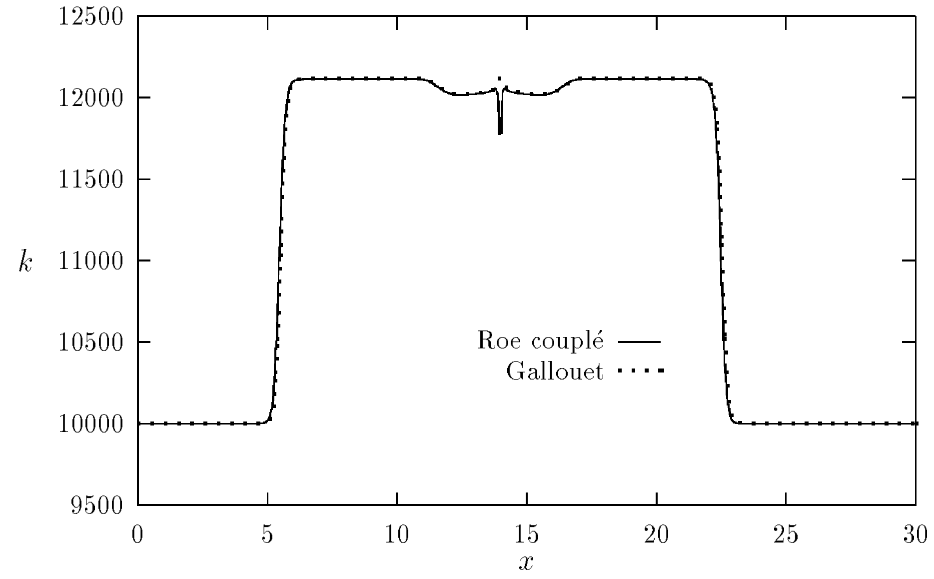


Figure 32: Variation de la tension normale turbulente, schéma de Roe couplé/ schéma de Gallouet, cas 2a

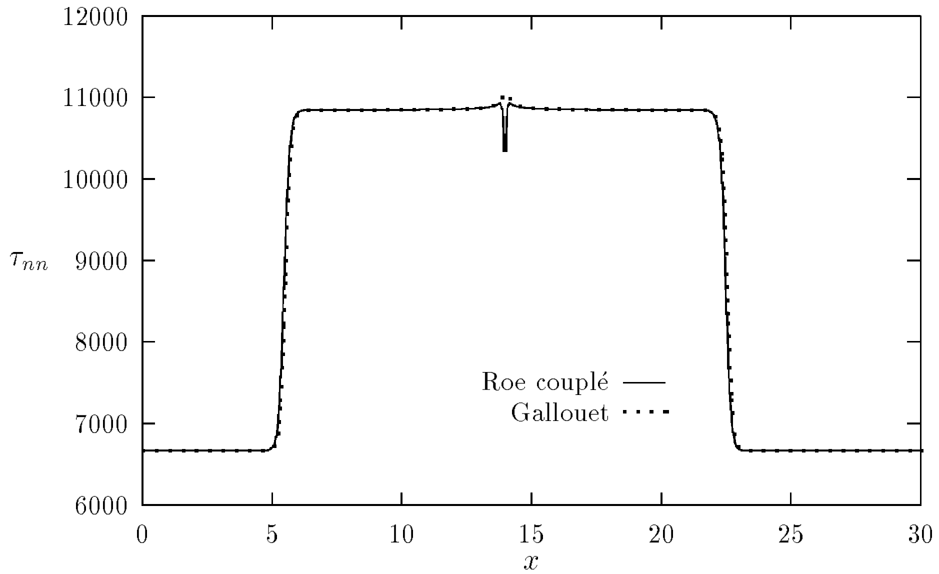


Figure 33: Variation de la deuxième tension normale, schéma de Roe couplé/ schéma de Gallouet, cas 2a

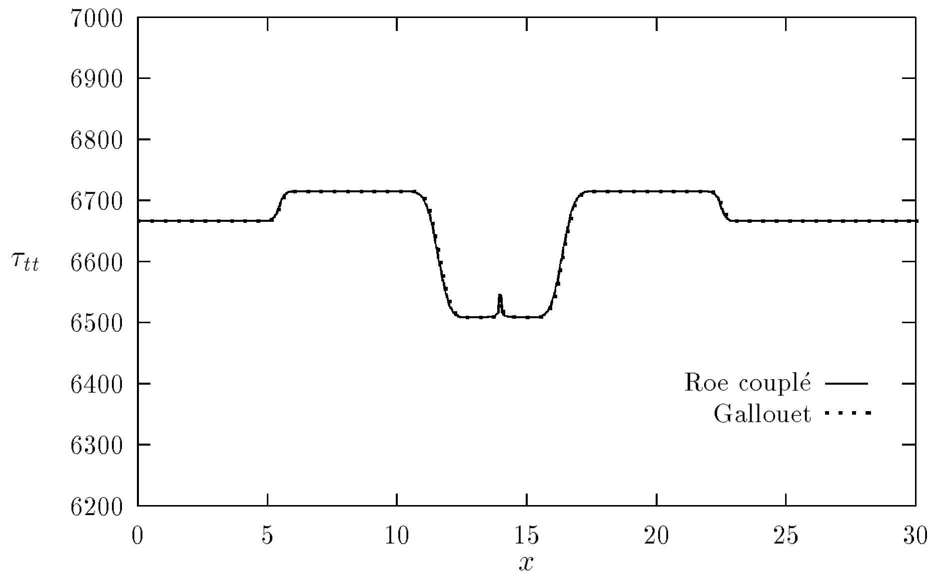


Figure 34: Variation de la tension tangentielle, schéma de Roe couplé/ schéma de Gallouet, cas 2a

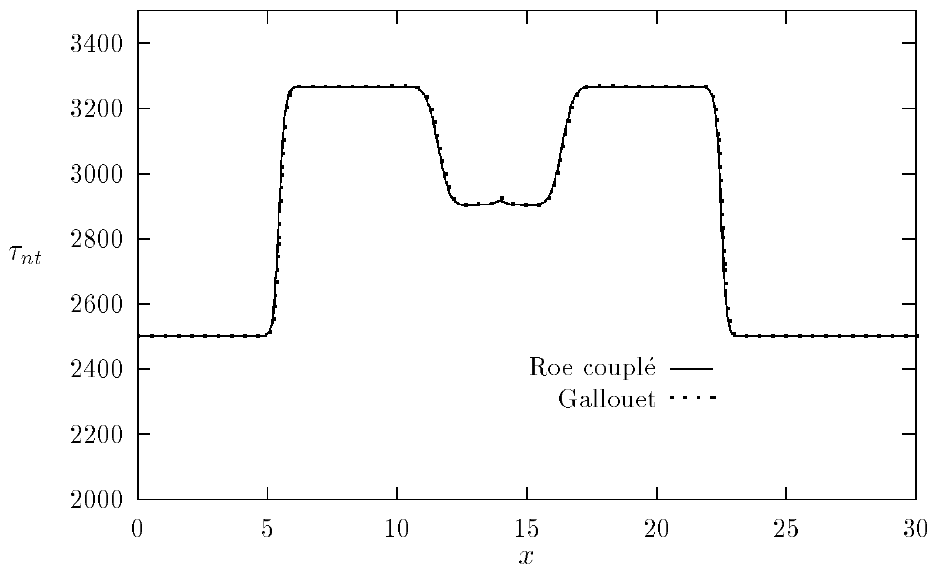


Figure 35: Variation du déterminant des tensions, schéma de Roe couplé/ schéma de Gallouet, cas 2a

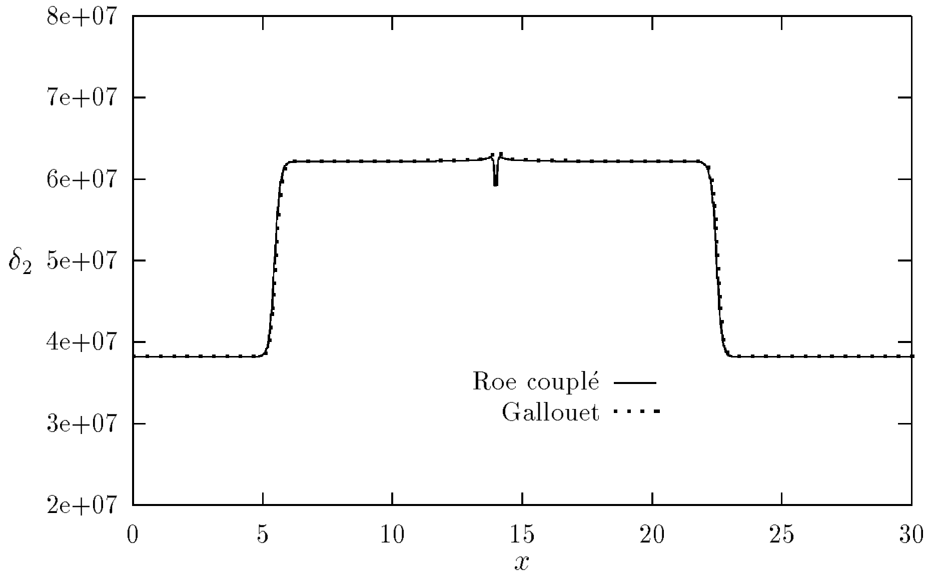
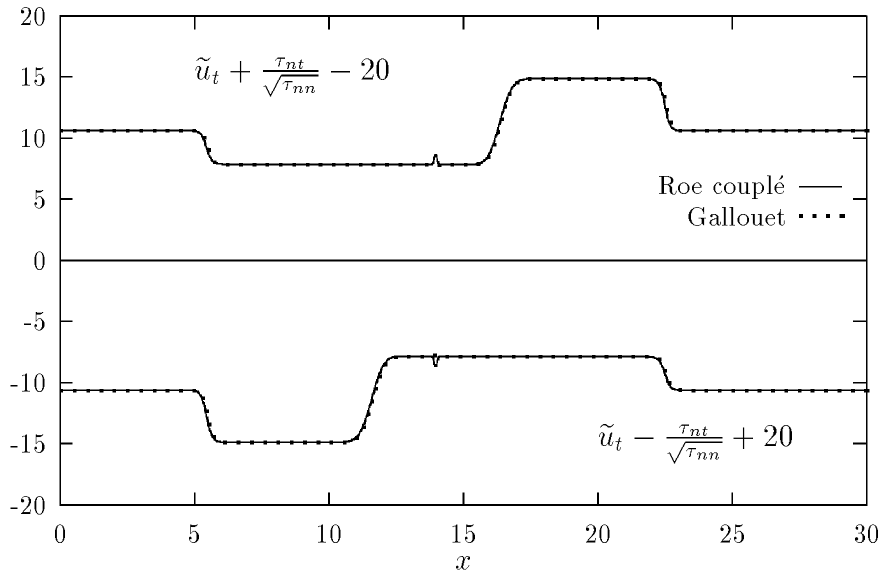


Figure 36: Variation des invariants associés à la vitesse tangentielle, schéma de Roe couplé/ schéma de Gallouet, cas 2a



Cas 2b: comparaison Roe couplé – Roe découplé

Figure 37: Variation de la masse volumique, schéma de Roe couplé/ schéma de Roe découplé, cas 2b

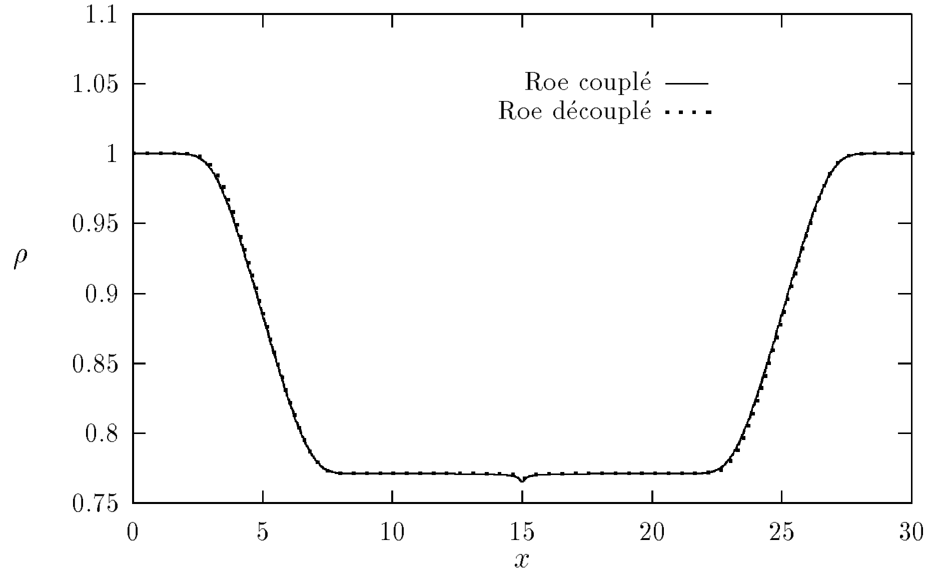


Figure 38: Variation de la vitesse axiale, schéma de Roe couplé/ schéma de Roe découplé, cas 2b

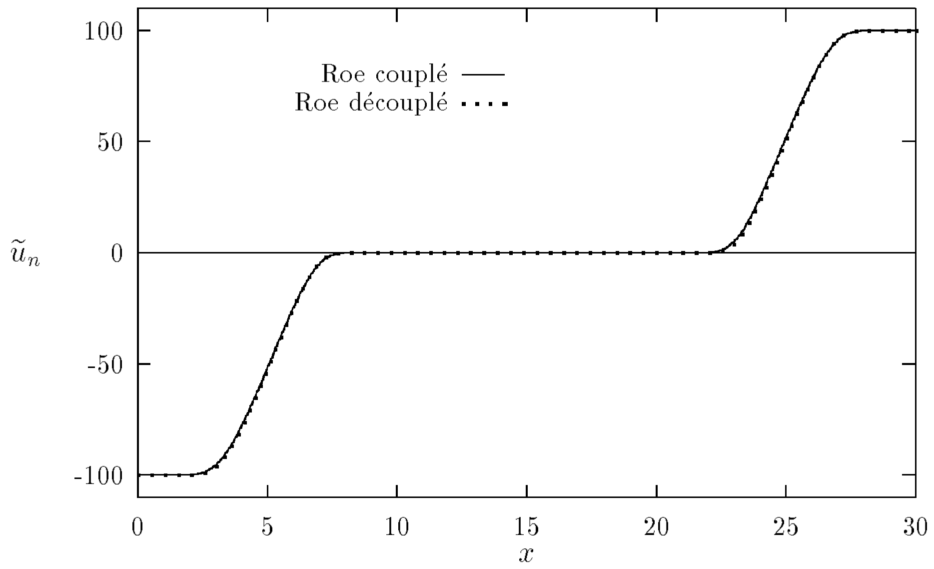


Figure 39: Variation de la vitesse tangentielle, schéma de Roe couplé/ schéma de Roe découplé, cas 2b

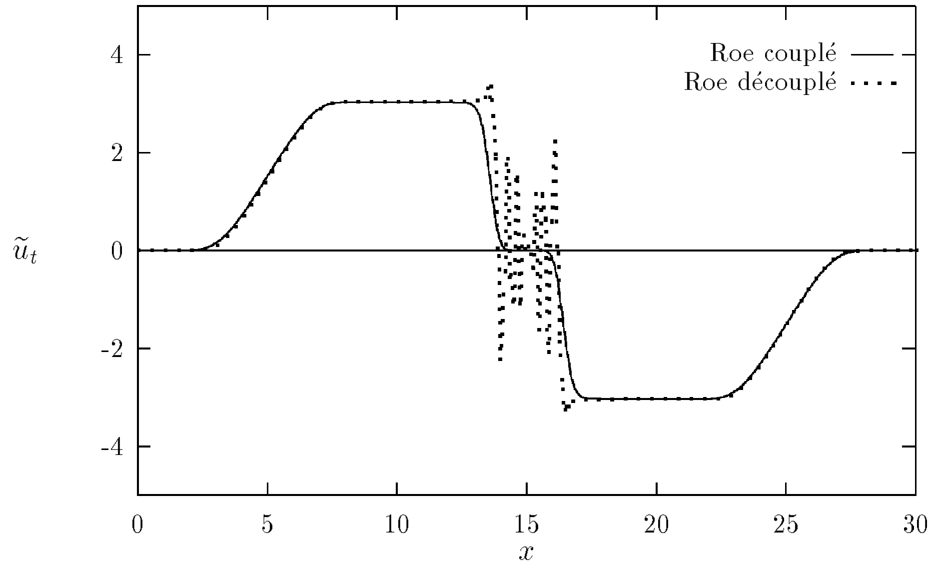


Figure 40: Variation de la pression et de la somme des tensions normales, schéma de Roe couplé/ schéma de Roe découplé, cas 2b

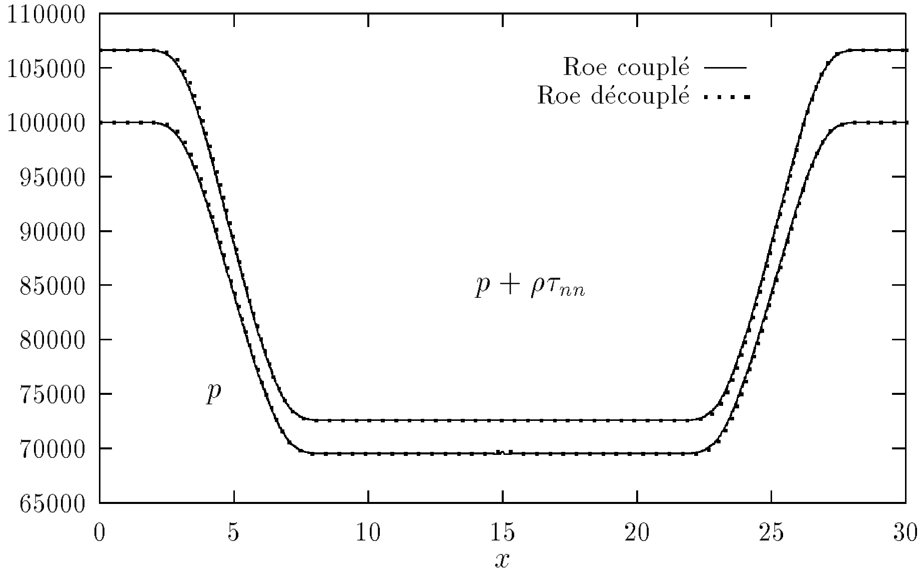


Figure 41: Variation de l'énergie cinétique turbulente, schéma de Roe couplé/ schéma de Roe découplé, cas 2b

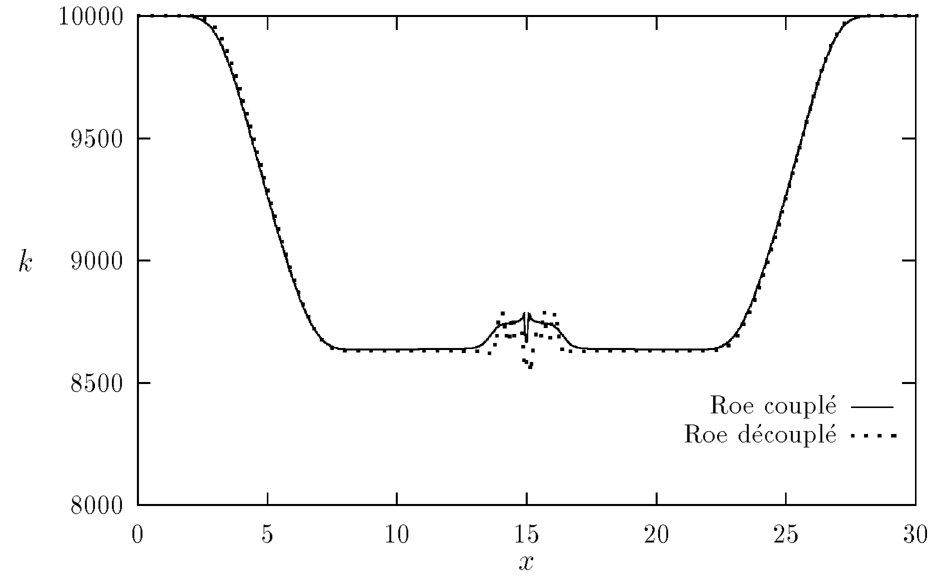


Figure 42: Variation de la tension normale turbulente, schéma de Roe couplé/ schéma de Roe découplé, cas 2b

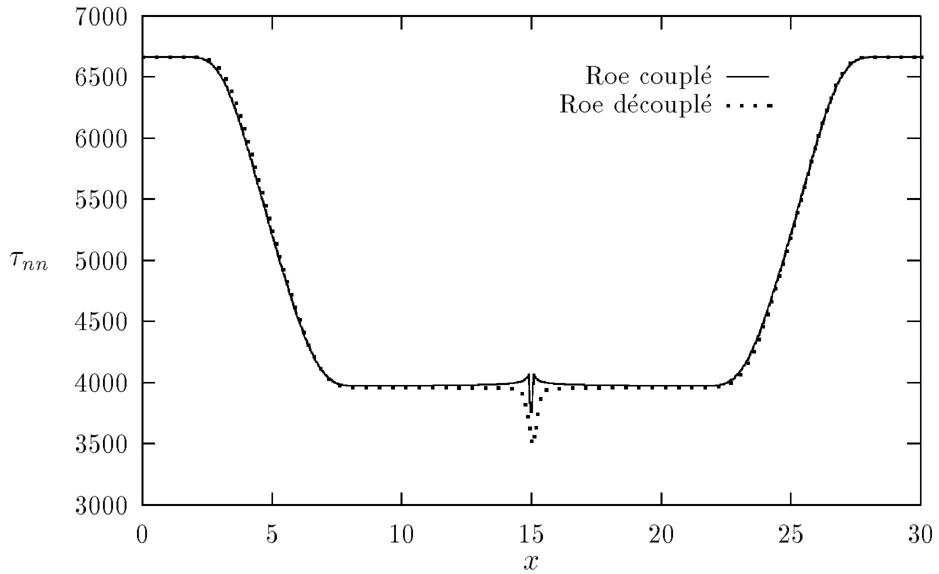


Figure 43: Variation de la deuxième tension normale, schéma de Roe couplé/ schéma de Roe découplé, cas 2b

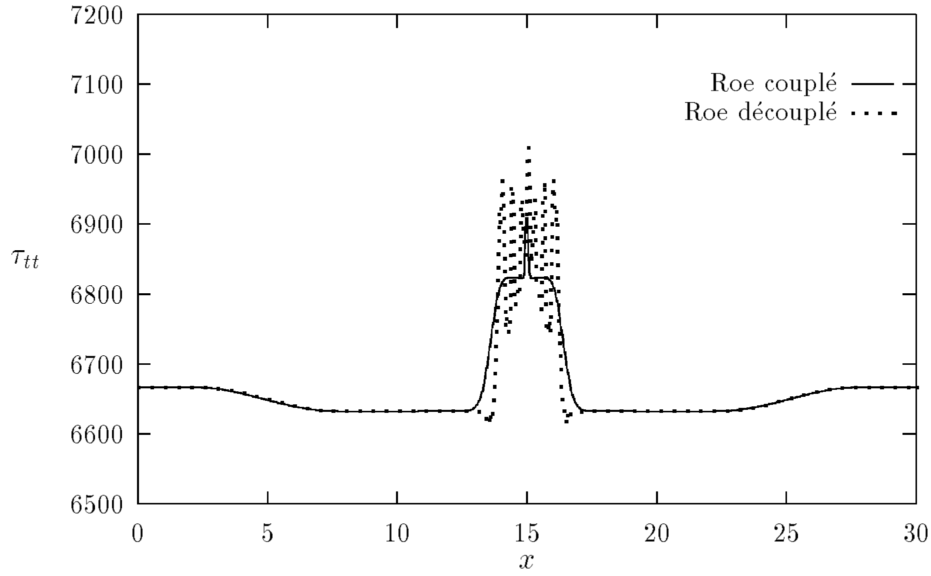


Figure 44: Variation de la tension tangentielle, schéma de Roe couplé/ schéma de Roe découplé, cas 2b

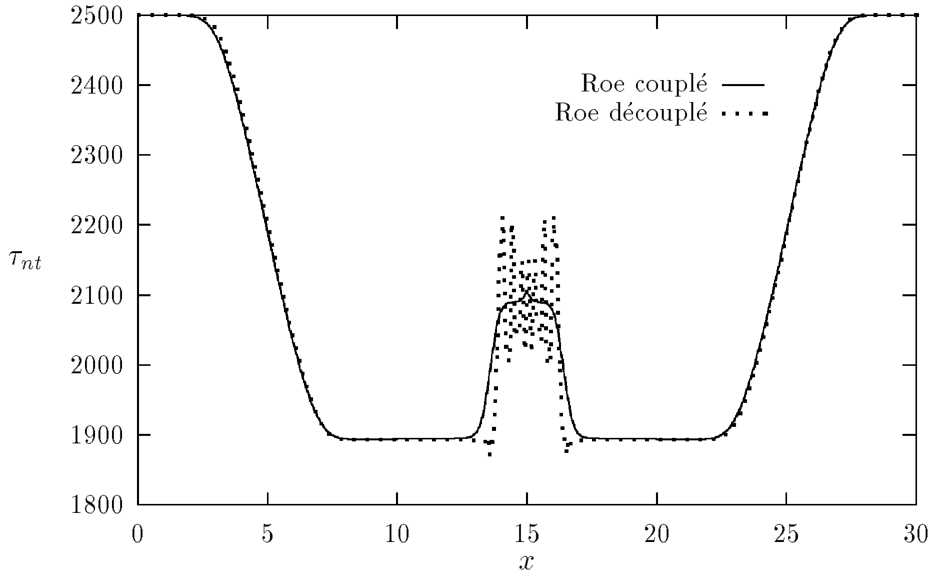


Figure 45: Variation du déterminant des tensions, schéma de Roe couplé/ schéma de Roe découplé, cas 2b

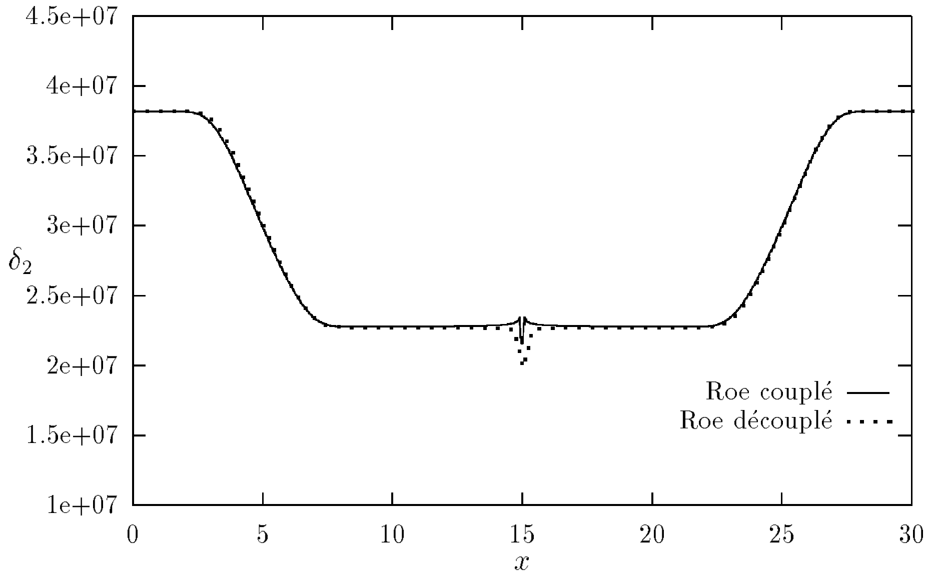
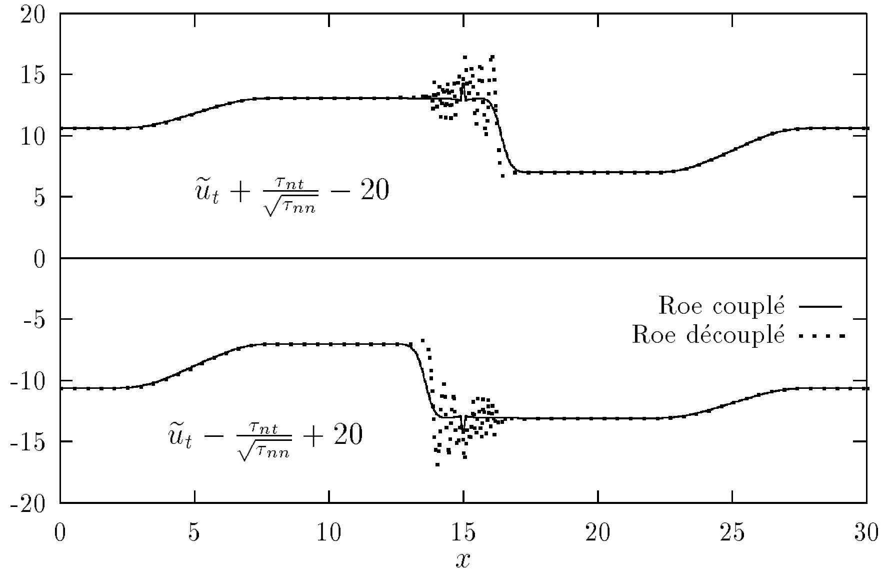


Figure 46: Variation des invariants associés à la vitesse tangentielle, schéma de Roe couplé/ schéma de Roe découplé, cas 2b



Cas 2b: comparaison Roe couplé – Gallouet

Figure 47: Variation de la masse volumique, schéma de Roe couplé/ schéma de Gallouet, cas 2b

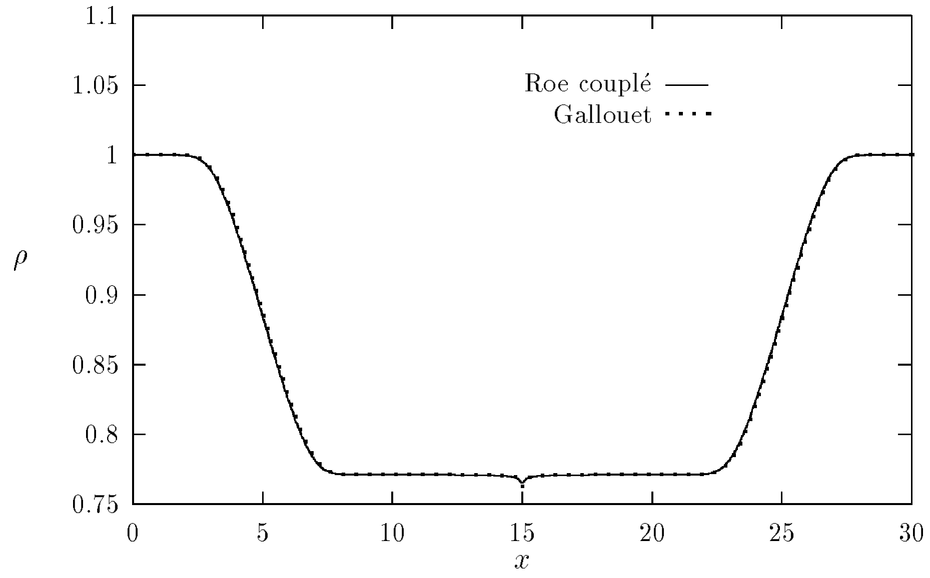


Figure 48: Variation de la vitesse axiale, schéma de Roe couplé/ schéma de Gallouet, cas 2b

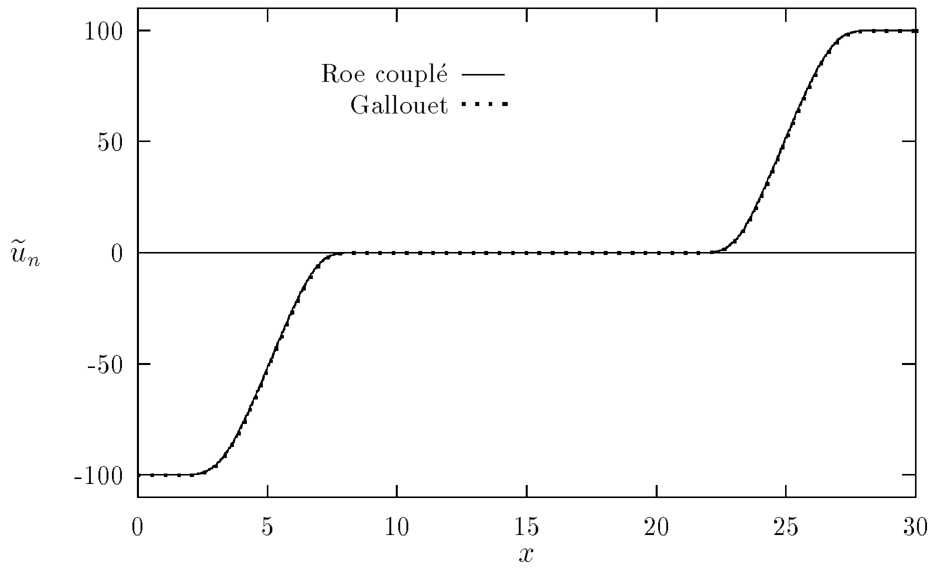


Figure 49: Variation de la vitesse tangentielle, schéma de Roe couplé/ schéma de Gallouet, cas 2b

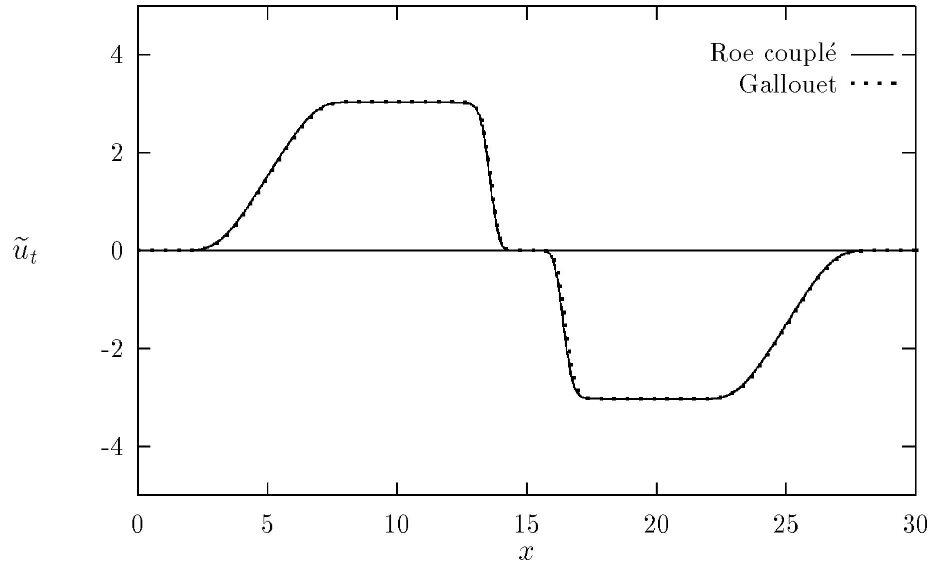


Figure 50: Variation de la pression et de la somme des tensions normales, schéma de Roe couplé/ schéma de Gallouet, cas 2b

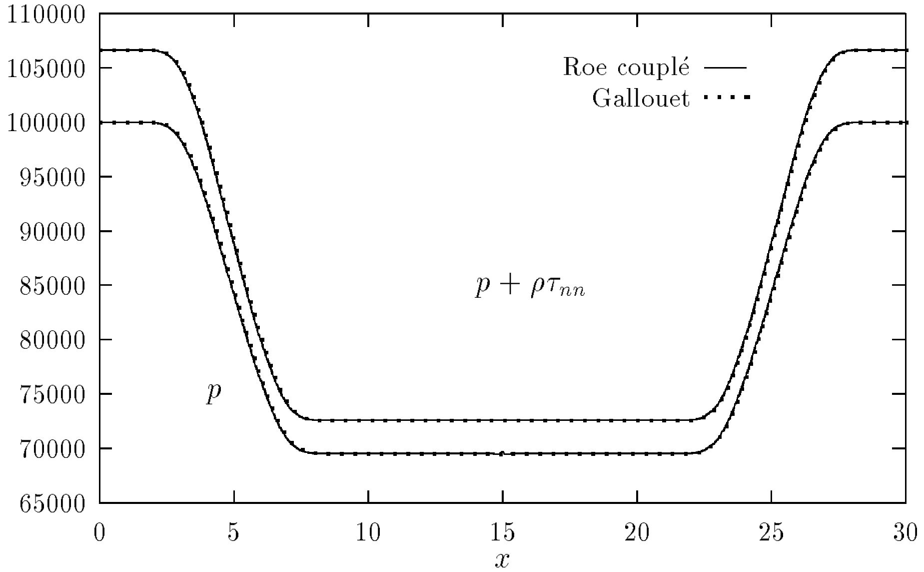


Figure 51: Variation de l'énergie cinétique turbulente, schéma de Roe couplé/ schéma de Gallouet, cas 2b

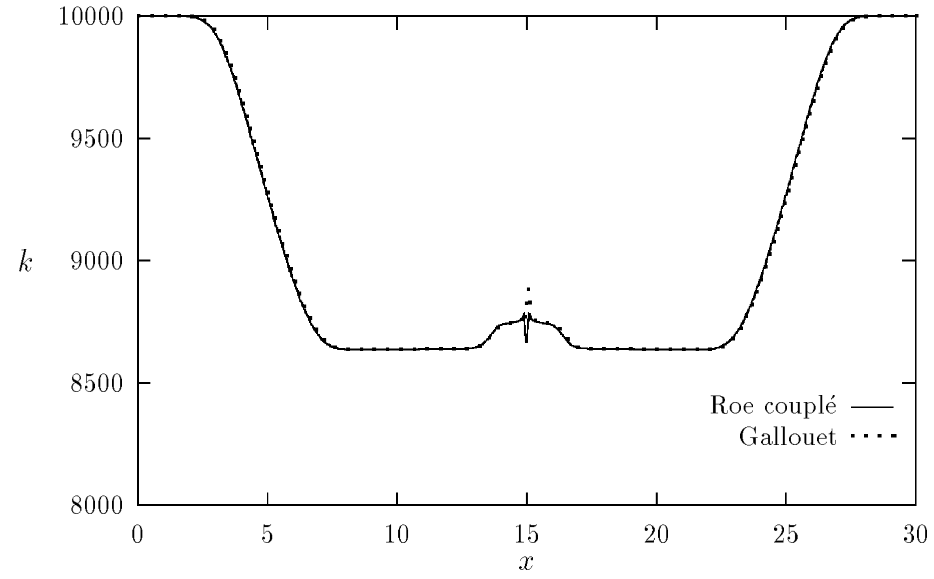


Figure 52: Variation de la tension normale turbulente, schéma de Roe couplé/ schéma de Gallouet, cas 2b

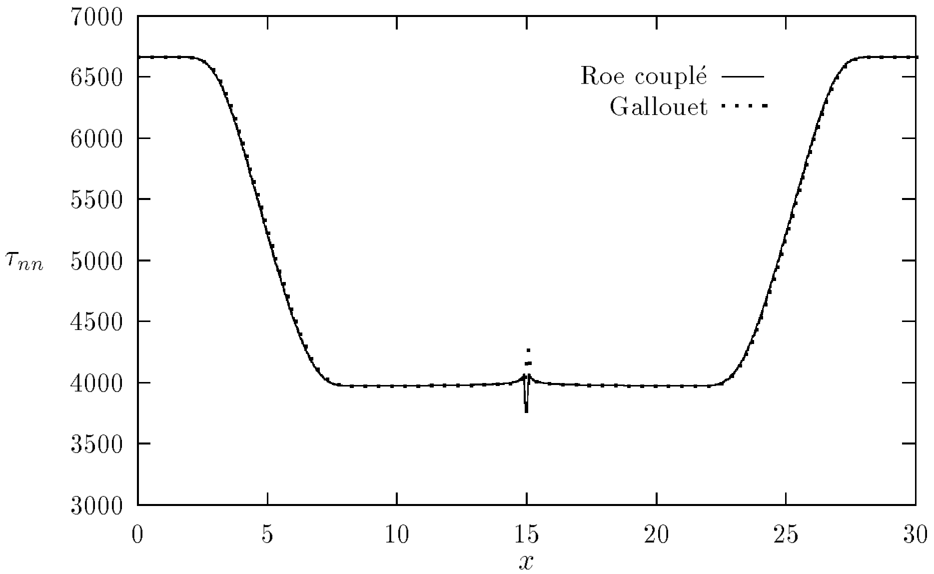


Figure 53: Variation de la deuxième tension normale, schéma de Roe couplé/ schéma de Gallouet, cas 2b

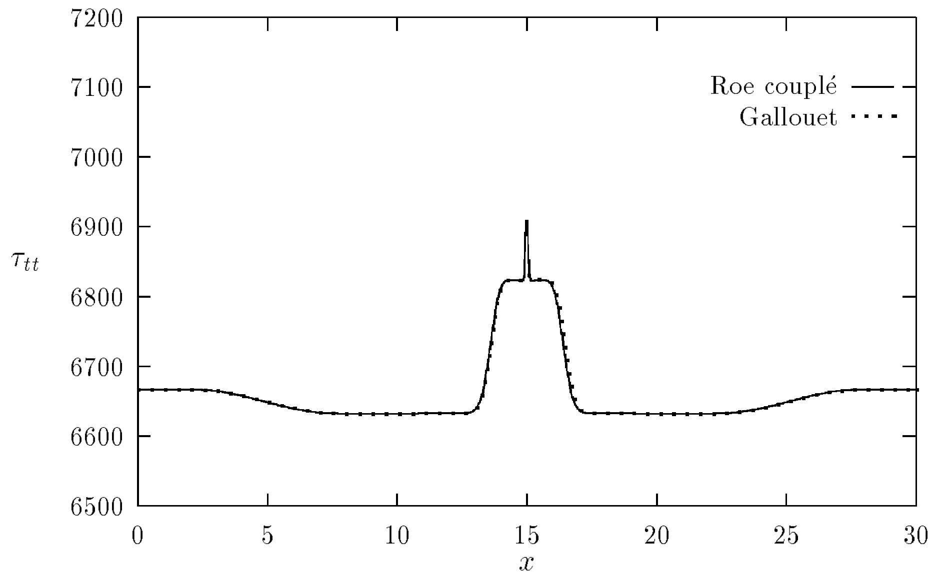


Figure 54: Variation de la tension tangentielle, schéma de Roe couplé/ schéma de Gallouet, cas 2b

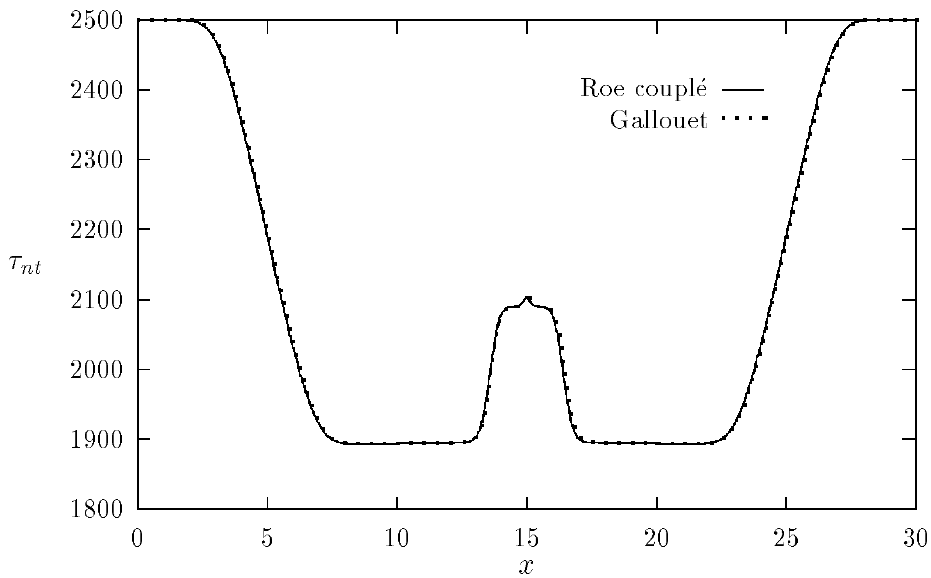


Figure 55: Variation du déterminant des tensions, schéma de Roe couplé/ schéma de Gallouet, cas 2b

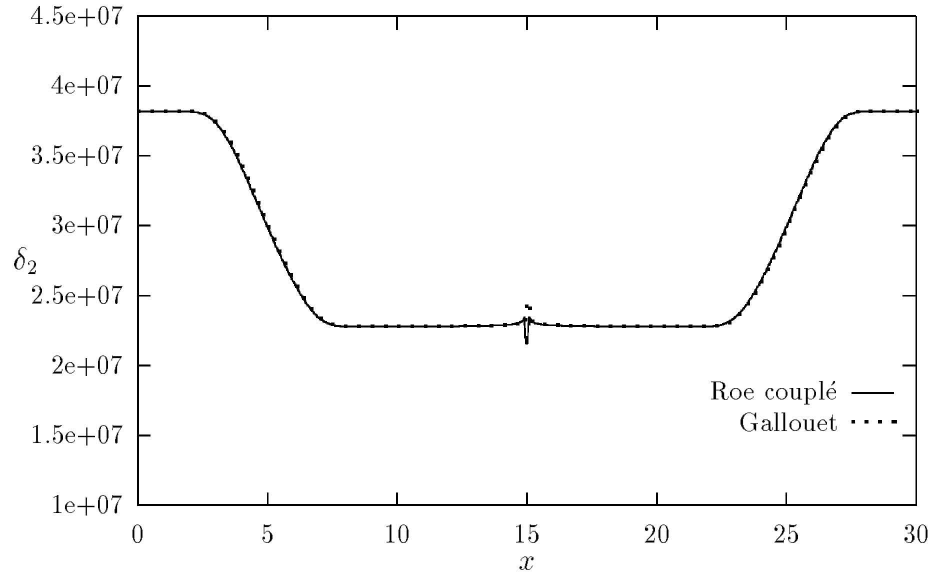
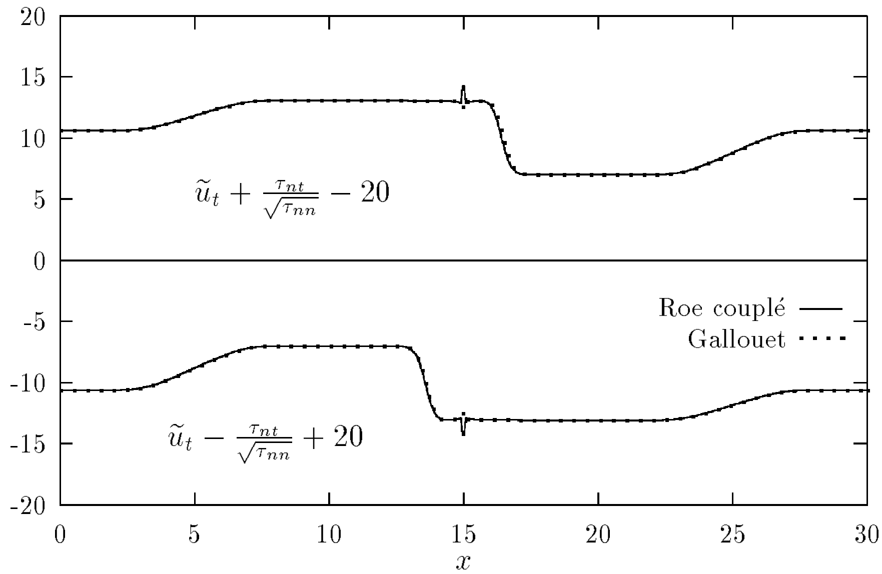


Figure 56: Variation des invariants associés à la vitesse tangentielle, schéma de Roe couplé/ schéma de Gallouet, cas 2b



A Diagonalisabilité de la matrice du système

On considère le cas où les six premières valeurs propres de l'équation (14) sont identiques, donc le cas où l'expression Φ est nulle. Dans cette situation la matrice (4) n'est plus diagonalisable, car il n'existe que quatre vecteurs propres associés qui sont linéaires indépendants.

Le terme Φ est une combinaison linéaire des corrélations doubles $\widetilde{u_i u_j}$ et du vecteur normale unitaire $\vec{n}$:

$$\Phi \;=\; n_i \cdot \widetilde{u_i u_j} \cdot n_j \quad . \tag{53}$$

Si le tenseur des tensions turbulentes est réalisable, on peut réécrire la relation (53) dans les axes principaux de celui-ci avec un nouveau vecteur unitaire $\vec{n'}$ et des valeurs propres λ_i non-négatives:

$$\Phi \;=\; \vec{n'}^T . \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \vec{n'} \;=\; \lambda_1 \, {n'_x}^2 \;+\; \lambda_2 \, {n'_y}^2 \quad . \tag{54}$$

Les composantes n'_x et n'_y ne peuvent pas être nulles simultanément. Pour retrouver une valeur de Φ nulle il faudrait donc qu'au moins une des valeurs propres λ_i soit nulle. Dans ce cas, le déterminant du tenseur des corrélations doubles serait également nul, car $\det\left(\widetilde{u_i u_j}\right) = \lambda_1 \, \lambda_2$.

Il faut donc montrer que le déterminant du tenseur des tensions ne peut pas être nul. Pour cela, on écrit l'équation de transport des corrélations doubles dans notre système (2), en utilisant la conservation de la masse:

$$\left(\widetilde{u_i u_j}\right)_{,t} + \widetilde{u}_k \left(\widetilde{u_i u_j}\right)_{,k} + \widetilde{u_i u_k} \left(\widetilde{u}_j\right)_{,k} + \widetilde{u_j u_k} \left(\widetilde{u}_i\right)_{,k} \;=\; 0 \quad . \tag{55}$$

En définissant $\delta_2 \equiv \det(\widetilde{u_i u_j}) = \widetilde{uu}\widetilde{vv} - \widetilde{uv}^2$, on peut déduire une équation d'évolution pour le déterminant (proche de celle de la reference [18]):

$$\left(\delta_2\right)_{,t} + \widetilde{u}_k \left(\delta_2\right)_{,k} \;=\; 2\delta_2 \widetilde{u}_{k,k} \quad , \tag{56}$$

ou de manière équivalente

$$\frac{\mathrm{d}\delta_2}{\mathrm{d}t} \;=\; 2\delta_2 \widetilde{u}_{k,k} \quad , \tag{57}$$

qui exprime le changement le long les lignes de courant par la divergence de la vitesse moyenne. Par intégration de l'équation (57) on obtient:

$$\delta_2(x,t) \;=\; \delta_2(x_0,t_0) \cdot \exp\left(2 \int_0^t \widetilde{u}_{k,k} \mathrm{d}t\right) \quad . \tag{58}$$

Le résultat (58) signifie que la valeur du déterminant δ_2 le long d'une ligne de courant ne peut pas devenir nulle dans des intervalles finis si sa valeur initiale n'est pas nulle. En conclusion, on a donc établi que la diagonalisabilité de la matrice (4) est assurée par des valeurs initiales des corrélations doubles de vitesse qui sont réalisables dans le sens de Schumann [12] et qui ont un déterminant non-nul.

B Les vecteurs propres à droite

On donne les expressions pour les vecteurs propres à droite du systéme des équations en variables conservatives exprimé dans le repère local (15):

$$\vec{r}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{\rho}{\Gamma_1} \\ \rho \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} , \quad \vec{r}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \rho \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} , \quad \vec{r}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ \widetilde{u}_n \\ \widetilde{u}_t \\ E_{cin} - \frac{\tau_{nn}}{\Gamma_1} \\ \tau_{nn} \\ \tau_{tt} \\ 0 \\ k \end{bmatrix} , \tag{59}$$

$$\vec{r}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \rho \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \rho \end{bmatrix} , \quad \vec{r}_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho\sqrt{\tau_{nn}} \\ \rho\,\widetilde{u}_t\sqrt{\tau_{nn}} + \rho\,\tau_{nt} \\ 0 \\ 2\,\rho\,\tau_{nt} \\ \rho\,\tau_{nn} \\ \rho\,\tau_{nt} \end{bmatrix} , \quad \vec{r}_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho\sqrt{\tau_{nn}} \\ \rho\,\widetilde{u}_t\sqrt{\tau_{nn}} - \rho\,\tau_{nt} \\ 0 \\ -2\,\rho\,\tau_{nt} \\ -\rho\,\tau_{nn} \\ -\rho\,\tau_{nt} \end{bmatrix} , \tag{60}$$

$$\vec{r}_7 = \left[r_7^i \right] , \quad \vec{r}_8 = \left[r_8^i \right] , \tag{61}$$

$$\begin{aligned} r_7^1 = r_8^1 &= \frac{\rho\,(2\,\tau_{nn} + c^2)}{4} \\ r_7^2 &= \frac{\rho\,\widetilde{u}_n\tau_{nn}}{2} + \frac{\rho\,\widetilde{u}_n c^2}{4} + \frac{\rho\,c_2\tau_{nn}}{2} + \frac{\rho\,c_2 c^2}{4} \\ r_7^3 &= \frac{\rho\,\widetilde{u}_t\tau_{nn}}{2} + \frac{\rho\,\widetilde{u}_t c^2}{4} + \frac{\rho\,\tau_{nt}\,c_2}{2} \end{aligned} . \tag{62}$$

$$
\begin{aligned}
r_7^4 &= \frac{\rho}{8}\left(\frac{4\,c^2\tau_{nn}+2\,c^4}{\Gamma_1}+c_2\left(4\,\tau_{nn}\,\widetilde{u}_n+4\,\tau_{nt}\,\widetilde{u}_t+2\,\widetilde{u}_n c^2\right)\right.\\
&\qquad \left.+c^2\left(2\,\tau_{nn}+2E_{cin}\right)+4\,\tau_{nn}^2+4\,{\tau_{nt}}^2+\tau_{nn}\,4E_{cin}\right)\\
r_7^5=r_8^5 &= \frac{3\,\tau_{nn}\,\rho\,\left(2\,\tau_{nn}+c^2\right)}{4}\\
r_7^6=r_8^6 &= \frac{\rho\,\tau_{tt}\,\tau_{nn}}{2}+\frac{\rho\,\tau_{tt}\,c^2}{4}+\rho\,{\tau_{nt}}^2\\
r_7^7=r_8^7 &= \frac{3\,\tau_{nn}\,\tau_{nt}\,\rho}{2}+\frac{\rho\,\tau_{nt}\,c^2}{2}\\
r_7^8=r_8^8 &= \frac{\rho\,k\tau_{nn}}{2}+\frac{\rho\,kc^2}{4}+\frac{\rho\,{\tau_{nt}}^2}{2}+\frac{\rho\,c^2\tau_{nn}}{4}+\frac{\rho\,\tau_{nn}^2}{2}\\
r_8^2 &= \frac{\rho\,\widetilde{u}_n\tau_{nn}}{2}+\frac{\rho\,\widetilde{u}_n c^2}{4}-\frac{\rho\,c_2\tau_{nn}}{2}-\frac{\rho\,c_2 c^2}{4}\\
r_8^3 &= \frac{\rho\,\widetilde{u}_t\tau_{nn}}{2}+\frac{\rho\,\widetilde{u}_t c^2}{4}-\frac{\rho\,\tau_{nt}\,c_2}{2}\\
r_8^4 &= \frac{\rho}{8}\left(\frac{4\,c^2\tau_{nn}+2\,c^4}{\Gamma_1}-c_2\left(4\,\tau_{nn}\,\widetilde{u}_n+4\,\tau_{nt}\,\widetilde{u}_t+2\,\widetilde{u}_n c^2\right)\right.\\
&\qquad \left.+c^2\left(2\,\tau_{nn}+2E_{cin}\right)+4\,\tau_{nn}^2+4\,{\tau_{nt}}^2+\tau_{nn}\,4E_{cin}\right)
\end{aligned}
\quad . \qquad (63)
$$

On a utilisé l'abréviation $E_{cin} \equiv \left(\widetilde{u}_n^2+\widetilde{u}_t^2\right)/2+k$. On note que les vecteurs (59) à (63) forment les colonnes de la matrice de passage qui est obtenue par la multiplication $M^{-1}\,L$.

C Coefficients de la projection de l'écart des variables sur les vecteurs propres

La résolution du système linéaire (45) donne:

$$\begin{aligned}
\beta_1 = & \Big(-\tau_{nn}\left[\rho\right]c^2+\left[\rho\tau_{nn}\right]c^2-2\tau_{nn}\left[\rho k\right]+2\left[\rho k\right]\gamma\tau_{nn}+\left[\rho\right]\widetilde{u}_t^2\tau_{nn} \\
& -\left[\rho\right]\widetilde{u}_n^2\gamma\tau_{nn}+\left[\rho\right]\widetilde{u}_n^2\tau_{nn}+2\left[\rho\widetilde{e}_t\right]\tau_{nn}+2\left[\rho\widetilde{u}_t\right]\gamma\widetilde{u}_t\tau_{nn}-2\left[\rho\widetilde{u}_t\right]\widetilde{u}_t\tau_{nn} \\
& -2\left[\rho\widetilde{e}_t\right]\gamma\tau_{nn}+2\left[\rho\widetilde{u}_n\right]\gamma\widetilde{u}_n\tau_{nn}-2\left[\rho\widetilde{u}_n\right]\widetilde{u}_n\tau_{nn}-3\tau_{nn}\tau_{nn}\left[\rho\right] \\
& -\left[\rho\right]\widetilde{u}_t^2\gamma\tau_{nn}+\left[\rho\tau_{nn}\right]\tau_{nn}\Big)/\rho/c_2^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_2 = & -1/\rho\Big(2c^2\tau_{nt}\left[\rho\tau_{nt}\right]-c^2\left[\rho\tau_{tt}\right]\tau_{nn}+c^2\tau_{tt}\left[\rho\right]\tau_{nn}+2\tau_{nt}^2\left[\rho\right]\widetilde{u}_t^2 \\
& -4\tau_{nt}^2\left[\rho\widetilde{u}_t\right]\widetilde{u}_t-4\tau_{nt}^2\left[\rho\widetilde{u}_n\right]\widetilde{u}_n+4\tau_{nt}^2\left[\rho\widetilde{u}_t\right]\gamma\widetilde{u}_t-2\tau_{nt}^2\left[\rho\right]\widetilde{u}_t^2\gamma \\
& -3\left[\rho\tau_{tt}\right]\tau_{nn}\tau_{nn}+6\tau_{nt}\left[\rho\tau_{nt}\right]\tau_{nn}+3\tau_{tt}\left[\rho\right]\tau_{nn}\tau_{nn}+4\tau_{nt}^2\left[\rho\widetilde{u}_n\right]\gamma\widetilde{u}_n \\
& -4\tau_{nt}^2\left[\rho k\right]+2\tau_{nt}^2\left[\rho\right]\widetilde{u}_n^2+4\tau_{nt}^2\left[\rho k\right]\gamma-4\tau_{nt}^2\left[\rho\tau_{nn}\right]+4\tau_{nt}^2\left[\rho\widetilde{e}_t\right] \\
& -2\tau_{nt}^2\left[\rho\right]\widetilde{u}_n^2\gamma-4\tau_{nt}^2\left[\rho\widetilde{e}_t\right]\gamma\Big)/c_2^2/\tau_{nn}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_3 = & 1/2\Big(2\left[\rho\right]c^2-\left[\rho\right]\widetilde{u}_n^2\gamma+\left[\rho\right]\widetilde{u}_n^2-2\left[\rho\widetilde{e}_t\right]\gamma-\left[\rho\right]\widetilde{u}_t^2\gamma \\
& -2\left[\rho k\right]+6\tau_{nn}\left[\rho\right]-2\left[\rho\tau_{nn}\right]+2\left[\rho\widetilde{u}_n\right]\gamma\widetilde{u}_n \\
& -2\left[\rho\widetilde{u}_n\right]\widetilde{u}_n+2\left[\rho k\right]\gamma+2\left[\rho\widetilde{u}_t\right]\gamma\widetilde{u}_t+2\left[\rho\widetilde{e}_t\right]+\left[\rho\right]\widetilde{u}_t^2-2\left[\rho\widetilde{u}_t\right]\widetilde{u}_t\Big)/c_2^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_4 = & -1/2\Big(-2\tau_{nn}\tau_{nn}\left[\rho\widetilde{u}_t\right]\gamma\widetilde{u}_t-2\tau_{nn}\tau_{nn}\left[\rho\widetilde{u}_n\right]\gamma\widetilde{u}_n+4\tau_{nt}^2\left[\rho\widetilde{u}_t\right]\gamma\widetilde{u}_t \\
& +\tau_{nn}\tau_{nn}\left[\rho\right]\widetilde{u}_n^2\gamma-4\tau_{nn}\tau_{nn}\left[\rho k\right]-2\tau_{nt}^2\left[\rho\right]\widetilde{u}_n^2\gamma-2\tau_{nt}^2\left[\rho\right]\widetilde{u}_t^2\gamma \\
& -\tau_{nn}\tau_{nn}\left[\rho\right]\widetilde{u}_n^2+2\tau_{nt}^2\left[\rho\right]\widetilde{u}_n^2+2\tau_{nn}\tau_{nn}\left[\rho\widetilde{u}_n\right]\widetilde{u}_n+4\tau_{nt}^2\left[\rho k\right]\gamma \\
& +2c^2\tau_{nn}k\left[\rho\right]-4\tau_{nt}^2\left[\rho k\right]-2\tau_{nn}\tau_{nn}\left[\rho\widetilde{e}_t\right]+4\tau_{nt}^2\left[\rho\widetilde{u}_n\right]\gamma\widetilde{u}_n+4\tau_{nt}^2\left[\rho\widetilde{e}_t\right] \\
& +2\tau_{nn}\tau_{nn}\left[\rho\tau_{nn}\right]-4\tau_{nt}^2\left[\rho\tau_{nn}\right]+\tau_{nn}\tau_{nn}\left[\rho\right]\widetilde{u}_t^2\gamma+2\tau_{nt}^2\left[\rho\right]\widetilde{u}_t^2 \\
& +2\tau_{nn}\tau_{nn}\left[\rho\widetilde{u}_t\right]\widetilde{u}_t-4\tau_{nt}^2\left[\rho\widetilde{u}_t\right]\widetilde{u}_t-4\tau_{nt}^2\left[\rho\widetilde{u}_n\right]\widetilde{u}_n-\tau_{nn}\tau_{nn}\left[\rho\right]\widetilde{u}_t^2 \\
& -2\tau_{nn}\tau_{nn}\left[\rho k\right]\gamma+6\tau_{nn}\tau_{nn}k\left[\rho\right]+2c^2\tau_{nt}\left[\rho\tau_{nt}\right]-2c^2\tau_{nn}\left[\rho k\right] \\
& -4\tau_{nt}^2\left[\rho\widetilde{e}_t\right]\gamma+2\tau_{nn}\tau_{nn}\left[\rho\widetilde{e}_t\right]\gamma+6\tau_{nt}\left[\rho\tau_{nt}\right]\tau_{nn}\Big)/\rho/c_2^2/\tau_{nn}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_5 = & 1/2\Big(\left[\rho\widetilde{u}_t\right]\sqrt{\tau_{nn}}c^2+\left[\rho\tau_{nt}\right]c^2-\widetilde{u}_t\left[\rho\right]\sqrt{\tau_{nn}}c^2-2\tau_{nt}\left[\rho\widetilde{u}_t\right]\widetilde{u}_t \\
& +2\tau_{nt}\left[\rho\widetilde{u}_n\right]\gamma\widetilde{u}_n+\tau_{nt}\left[\rho\right]\widetilde{u}_t^2+2\sqrt{\tau_{nn}}\left[\rho\right]u\tau_{nt}-\tau_{nt}\left[\rho\right]\widetilde{u}_n^2\gamma \\
& -2\tau_{nt}\left[\rho\widetilde{u}_n\right]\widetilde{u}_n+2\tau_{nt}\left[\rho k\right]\gamma+2\tau_{nn}^{3/2}\left[\rho\widetilde{u}_t\right]-\tau_{nt}\left[\rho\right]\widetilde{u}_t^2\gamma+2\tau_{nt}\left[\rho\widetilde{e}_t\right] \\
& +\tau_{nt}\left[\rho\right]\widetilde{u}_n^2-2\tau_{nt}\left[\rho\widetilde{e}_t\right]\gamma+2\left[\rho\tau_{nt}\right]\tau_{nn}-2\tau_{nt}\left[\rho\tau_{nn}\right]-2\tau_{nn}^{3/2}\widetilde{u}_t\left[\rho\right] \\
& -2\tau_{nt}\left[\rho k\right]-2\sqrt{\tau_{nn}}\left[\rho\widetilde{u}_n\right]\tau_{nt}+2\tau_{nt}\left[\rho\widetilde{u}_t\right]\gamma\widetilde{u}_t)/(2\rho\tau_{nn}+\rho c^2\Big)/\tau_{nn}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\beta_6 \;=\;& -1/2\Big(\left[\rho\tau_{nt}\right]c^2-\left[\rho\widetilde{u}_t\right]\sqrt{\tau_{nn}}c^2+\widetilde{u}_t\left[\rho\right]\sqrt{\tau_{nn}}c^2+2\left[\rho\tau_{nt}\right]\tau_{nn}\\
&+\tau_{nt}\left[\rho\right]\widetilde{u}_n^2-\tau_{nt}\left[\rho\right]\widetilde{u}_t^2\gamma+2\tau_{nt}\left[\rho k\right]\gamma-2\tau_{nt}\left[\rho\widetilde{u}_n\right]\widetilde{u}_n-\tau_{nt}\left[\rho\right]\widetilde{u}_n^2\gamma\\
&-2\tau_{nt}\left[\rho\widetilde{e}_t\right]\gamma+2\tau_{nt}\left[\rho\widetilde{u}_t\right]\gamma\widetilde{u}_t-2\tau_{nt}\left[\rho\widetilde{u}_t\right]\widetilde{u}_t+\tau_{nt}\left[\rho\right]\widetilde{u}_t^2-2\tau_{nt}\left[\rho k\right]\\
&-2\tau_{nt}\left[\rho\tau_{nn}\right]+2\tau_{nn}^{3/2}\widetilde{u}_t\left[\rho\right]+2\tau_{nt}\left[\rho\widetilde{e}_t\right]-2\sqrt{\tau_{nn}}\left[\rho\right]\widetilde{u}_n\tau_{nt}\\
&+2\tau_{nt}\left[\rho\widetilde{u}_n\right]\gamma\widetilde{u}_n+2\sqrt{\tau_{nn}}\left[\rho\widetilde{u}_n\right]\tau_{nt}-2\tau_{nn}^{3/2}\left[\rho\widetilde{u}_t\right]\Big)/\rho/\tau_{nn}/(2\tau_{nn}+c^2)\\
\\
\beta_7 \;=\;& -\left(2\left[\rho\widetilde{u}_n\right]\gamma\widetilde{u}_n-2\left[\rho\widetilde{u}_n\right]\widetilde{u}_n-2c_2\left[\rho\widetilde{u}_n\right]+2\left[\rho\widetilde{u}_t\right]\gamma\widetilde{u}_t-2\left[\rho\widetilde{u}_t\right]\widetilde{u}_t\right.\\
&-2\left[\rho\widetilde{e}_t\right]\gamma+2\left[\rho\widetilde{e}_t\right]-\left[\rho\right]\widetilde{u}_n^2\gamma+\left[\rho\right]\widetilde{u}_n^2+2c_2\widetilde{u}_n\left[\rho\right]-\left[\rho\right]\widetilde{u}_t^2\gamma+\left[\rho\right]\widetilde{u}_t^2\\
&\left.+2\left[\rho k\right]\gamma-2\left[\rho k\right]-2\left[\rho\tau_{nn}\right]\right)/\left(\rho\beta\right)\\
\\
\beta_8 \;=\;& -\Big(-\left[\rho\right]\widetilde{u}_t^2\gamma+2\left[\rho\widetilde{u}_t\right]\gamma\widetilde{u}_t+2\left[\rho\widetilde{u}_n\right]\gamma\widetilde{u}_n-2c_2\widetilde{u}_n\left[\rho\right]-2\left[\rho k\right]+2\left[\rho\widetilde{e}_t\right]\\
&-2\left[\rho\tau_{nn}\right]+2c_2\left[\rho\widetilde{u}_n\right]+\left[\rho\right]\widetilde{u}_n^2-2\left[\rho\widetilde{u}_n\right]\widetilde{u}_n+2\left[\rho k\right]\gamma-2\left[\rho\widetilde{e}_t\right]\gamma\\
&+\left[\rho\right]\widetilde{u}_t^2-2\left[\rho\widetilde{u}_t\right]\widetilde{u}_t-\left[\rho\right]\widetilde{u}_n^2\gamma\Big)/\left(\rho\beta\right)\quad. \qquad (64)
\end{aligned}
$$

Dans les expressions (64) les crochets signifient la difference d'une variable: $[\Phi] = \Phi_j - \Phi_i$. De plus, on a omis les traits qui signifient la moyenne arithmétique. Il faut donc noter que toutes variables autre qu'entre crochets sont prises dans un état moyen, par exemple $\rho = (\rho_i + \rho_j)/2$ dans les équations (64).